

# Har du draget?

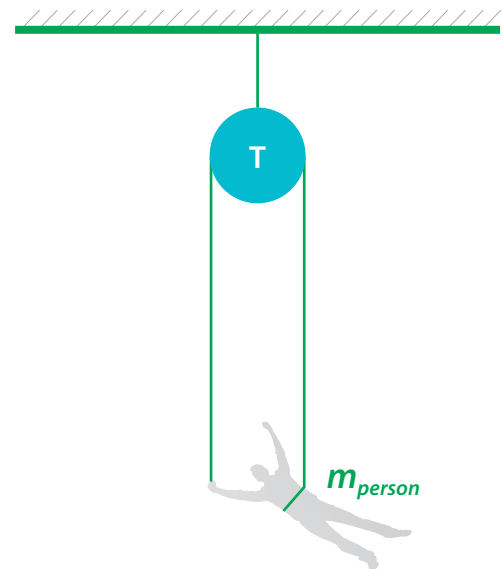
En lettfattelig innføring  
i klassisk mekanikk



# Har du draget?

En lettfattelig innføring  
i klassisk mekanikk

Per Thorvaldsen



Copyright © 2023 by  
Den ideelle organisasjon  
All Rights Reserved

2. utgave / 2. opplag 2023

ISBN: 978-82-997771-2-4

Omslagsfoto © Shutterstock/VikaSuh

Illustrasjoner på sidene 187, 307: © bennerdesign/stock.adobe.com  
Illustrasjoner på sidene 3, 114, 251: © Andrey Popov / stock.adobe.com  
Illustrasjon på side 252: © curto/stock.adobe.com

Forfatteren har mottatt støtte fra Det faglitterære fond

Boken er utgitt med støtte fra Kunnskapsdepartementet  
ved Lærebokordningen for høyere utdanning

Boken er utgitt med støtte av Tekna

Spørsmål om denne boken kan rettes til:  
Den ideelle organisasjon  
Tlf: +47 48 18 94 98

Materialet er vernet etter åndsverkloven.  
Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarframstilling  
bare tillatt når det er hjemlet i lov eller avtale med Kopinor.

## Tilfældighed

... vi henger i en tynn tråd, og den  
tråden er spunnet av tilfeldighetenes skygge.

*Halvbroren, Lars Saaby Christensen (1953- )*



# Til leseren

---

«If I have ever made any valuable discoveries, it has been owing more to patient attention, than to any other talent.»

Isaac Newton (1642–1727)

Kjære leser

Er du glad i tynne bøker? Har du lyst å lære klassisk mekanikk relativt fort og smertefritt? Da er denne boken som skapt for deg.

Det er ikke bare du og jeg som sliter med å forstå Newtons tre lover og klassisk mekanikk. Vi er faktisk så mange at vi forskes på av blant annet Hestenes med flere [2]. Hva er det vi ikke fatter eller begriper? Krefter, snordrag, bevegelse osv. Joda, jeg har tatt testen som Hestenes [2] har laget med rimelige resultater, men føler meg ikke trygg av den grunn. Som utdannet fysiker har jeg etter beste evne skjult min uvitenhet i klassisk mekanikk med bortforklaringer og unnvikelse.

Så tar flaksen meg. På et seminar taler jeg varmt for en bok, og i pausen er det en kollega som stikker til meg en annen bok som han mener jeg bør lese. ***Five Easy Lessons: Strategies for Successful Physics Teaching*** av Randall Knight [3]. Den boken handler om hvordan fysikk bør undervises, og ble lest med glede og interesse. Underveis ble det mye læring ved feiling. Jeg hadde nok alle de feilforestillinger, hverdagsforestillinger, som det er mulig å ha, men så plutselig knekte jeg koden. Selvsikkerhet og mestringsglede bredte seg i studerkammeret. Meg bekjent er det ingen lærebøker som er bygget på den lesten som Randall Knight foreslår i ***Five Easy Lessons***. Selv ikke hans egen lærebok.

Jeg tenkte derfor i mitt stille sinn at jeg kunne skrive en liten fysikkbok mens jeg tok et gjensyn med klassisk mekanikk. Som rød tråd bruker jeg snordraget. Snordraget blir av mange ansett som notorisk vanskelig og ubegripelig, men etter å ha grepet det har man en fantastisk veiviser inn i den klassiske mekanikken. Snordraget dukker formelig opp overalt, og gir oss en mulighet til å se på gamle problemer med nye øyne.

Boken er et ærlig forsøk på å skrive en kort og underholdende innføring i klassisk mekanikk. Boken er for deg som skal studere klassisk mekanikk i videregående eller høyere utdanning og er interessert i å få en god forståelse av emnet. Boken kan selvfølgelig også leses av andre som ønsker en rask og grundig innføring i klassisk mekanikk eller ønsker å oppfriske gammel kunnskap. Smugles gjerne kapittelet «**Innledende øvelse**» før du kjøper boken. Da ser du hva du får.

Intensjonen med *Har du draget? – En lettfattelig innføring i klassisk mekanikk* er at den skal inneholde gode og utfyllende forklaringer av det essensielle innholdet i emnet. Les boken etter lystprinsippet. Den kan leses fra A til Å, men du kan også lese litt her og der basert på det du trenger.

I møte med studenter opplever jeg ofte at vi har problemer med og lurer på det samme. For min egen del skyldes det tretti år i næringslivet som har gjort meg litt rusten i de grunnleggende kunnskaper og ferdigheter. Min utfordring er din fordel. Du går jo som kjent ikke til en øyenlege som ikke bruker briller, og heller ikke til en skomaker som ikke vet hvor skoen trykker. Nå får du læreren som har slitt med å forstå og som sammen med gode kollegaer og studenter har funnet forståelige forklaringer.

All erfaring tilsier at ingenting kommer av seg selv. Skal du bli god i grunnleggende klassisk mekanikk, må du arbeide. Det må leses og øves fra første dag. *Øvelse gjør mester!* husker jeg var tittelen på norsk boken i barneskolen. Det gjelder fremdeles. Følg gjerne oppskriften: studier – hvile og refleksjonstid – mer studier. En effektiv måte å avdekke manglende kunnskaper og ferdigheter på er å regne eksamensoppgaver. Det bør du starte med umiddelbart. I denne boken brukes øvingsoppgaver og eksamensoppgaver som døråpnere for teori.

Det viktigste er hva du lærer, ikke hvordan du tilegner deg lærdommen. Bruk gjerne alternative kilder dersom du har utfordringer med å forstå noe. Finn den forklaringen du forstår best. Denne boken ønsker å være *en* kompakt kilde til kunnskap innen klassisk mekanikk. Det finnes et vell av andre bøker der ute som går mer i dybden, har enda flere regneøvelser og tusenvis av sider. Der kan du finne mye bra, og jeg har i appendiks gitt noen forslag til videre lesning basert på bøker jeg selv har hatt stort utbytte av å lese.



Hva med andre læringsressurser? Absolutt! Forelesninger gir en grei innføring til stoffet særlig hvis du har forberedt deg på forhånd. Internett er en utømmelig kilde, og særlig kan enkle animasjoner være en god innfallsport til dypere forståelse. Selv lærer jeg nye ting ved å starte med gode populærvitenskapelige bøker og lærebøker jeg kjenner godt. Etter det brukes nettet for alt det det er verdt til å utvide kunnskapen.

«Seeing is believing». I klassisk mekanikk er en så heldig at mesteparten av teorien kan enten simuleres eller etterprøves i laboratoriet. Som du ser i kapittelet «**Møt familien**», er det ikke mange remedier som trengs.

Jeg vil få takke mine kollegaer for gode diskusjoner. Jeg vil spesielt få berømme førsteamanuensis i fysikk Trygve Buanes for boktips, forklaringer og oppgaver til en utålmodig og nysgjerrig kunnskapssøkende. Jeg takker Trygve Buanes som også sa seg villig til å bli bokens konsulent i tillegg til professor i fysikk Øyvind Grøn ved OsloMet.

Jeg vil også få takke Norsk faglitterær forfatter- og oversetterforening for et raust skrivestipend.

Det er vanlig i slike innledninger at forfatteren påtar seg ansvar for alt som måtte være feil i boken. Det får så være.

Til slutt uttrykker jeg i tillegg et håp om at du vil ha like stor glede av å lese boken som jeg hadde av å skrive den.

Hilsen

Per Thorvaldsen

PS! Ta gjerne kontakt dersom du har kommentarer, forslag til forbedringer eller annet.

# Til læreren

---

Denne boken har til hensikt å gi leseren en god forståelse av emnet klassisk mekanikk. Den inneholder derfor en blanding av fysikk og matematikk. I utgangspunktet er boken ment som tillegglitteratur til emnet fysikk slik det undervises i videregående og høyere utdanning. Boken kan selvfølgelig også brukes som en del av pensum.

Boken har en litt annerledes stil enn typiske lærebøker i fysikk. Det brukes humor, analogier, anekdoter og historiske merknader. Dette er gjort bevisst for å fenge leseren og for å øke forståelsen. Boken er nærmest en antitese av en formelsamling.

Mye av teorien blir innført ved hjelp av å løse eksamensoppgaver. Hensikten er å vise at teorien har relevans, og at oppgaver er en god måte å tilegne seg nytt stoff på.

I innholdsfortegnelsen er det gitt læringsutbytter for de enkelte kapitler. Boken starter med dynamikk, da det er det essensielle i den klassiske mekanikken. Nødvendig vektorlære, kinematikk, linjeintegral, konservative krefter, gravitasjon, koordinattransformasjoner og løsningsforslag til oppgaver er tatt med i **Appendiks**.

Når det gjelder fargelegging av fysiske vektorielle størrelser, har jeg valgt gravitasjonskraft ved jordens overflate svart, andre krefter rødt, hastigheter blå og posisjoner svart.

I gravitasjonskapitlet er Newtons klassiske utledning av gravitasjonsloven tatt med for allmenndannelsens skyld. Dette stoffet er kanskje litt utfordrende og er derfor blitt markert.

# Innhold

<b>1</b>	<b>Møt familien</b> .....	15
	LÆRINGSUTBYTTE: Nytt og gleden av snordraget som veiviser i klassisk mekanikk, tankeeksperiment, system og omgivelser, Newtons lover og bevaringslover, snoren, den masseløse snor, klossen, loddet, trinsen, fjæren, dimensjonsanalyse	
<b>2</b>	<b>Innledende øvelse</b> .....	23
	LÆRINGSUTBYTTE: Krefter, snordrag, Newtons lover, massesenter, den viktige forskjellen mellom Newtons tredje lov og de to første	
<b>3</b>	<b>Systematisk til verks</b> .....	31
	LÆRINGSUTBYTTE: Løsningsstrategi, system, omgivelser, frilegemediagram, snordrag med mange klosser, snor med masse	
<b>4</b>	<b>Historisk sett</b> .....	37
	LÆRINGSUTBYTTE: Galileos skråplan, kinematikk, dynamikk, Atwoods fallmaskin	
<b>5</b>	<b>På glattisen</b> .....	43
	LÆRINGSUTBYTTE: Friksjon, statisk friksjon, glidende friksjon, rullemotstand, snordragsoppgaver med friksjon	

<b>6</b>	<b>Stabilt som et korthus</b> .....	51
	LÆRINGSUTBYTTE: Likevekt, stive legemer, statikk, sum av krefter, bruk av Newtons tredje lov, likevektbetingelser, rettlinjete bevegelse, rotasjon, kraftpar, kraftmoment	
<b>7</b>	<b>Skyve eller dra – ett fett?</b> .....	59
	LÆRINGSUTBYTTE: Skyv av legemer, sammenheng mellom skyv og drag, overføring av kraft via friksjon	
<b>8</b>	<b>33 1/3 rpm</b> .....	67
	LÆRINGSUTBYTTE: Trinse med masse, konisk pendel, rotasjon med konstant fart, vinkelhastighet, sentripetalakselerasjon, regulator, spinn, kraftmoment, vinkelakselerasjon, tregghetsmoment, hovedtregghetsakser, jojo	
<b>9</b>	<b>Vel bevart</b> .....	77
	LÆRINGSUTBYTTE: Isolert system, bevaring av bevegelsesmengde, arbeid, energi, kinetisk energi, konservative krefter, potensiell energi, bevaring av energi, pendel, pendelhastighet, pendelens snordrag, harmonisk oscillator, pendelens periode, støt, elastisk støt, løsningsstrategier for energiberegninger, kinetisk rotasjonsenergi, Atwoods fallmaskin løst ved hjelp av energibetraktninger, bruk av energiberegninger versus Newtons lover, bevaring av spinn, massesenter, massesenterhastighet, massesenterakselerasjon, virkeområder for Newtons andre og tredje lov	
<b>10</b>	<b>Hiv ø' hoi!</b> .....	109
	LÆRINGSUTBYTTE: Taljer, differensiell talje	
<b>11</b>	<b>C-momenter</b> .....	113
	LÆRINGSUTBYTTE: Systemtenkning, dobbel Atwood-maskin, rullende legeme, oppgave på universitetsnivå, tau som sklir utfor bord	
<b>12</b>	<b>Alle hjelpemidler tillatt</b> .....	125
	LÆRINGSUTBYTTE: Mestre eksamensoppgaver, skråplan, sirkelbevegelse, fjær, ballistisk pendel, uelastisk støt, Hookes lov, fjærens potensielle energi og fjæren som harmonisk oscillator	

**13 Kvalitet i høyere utdanning**..... 141

LÆRINGSUTBYTTE: Harmonisk oscillator, frie svingninger, dempede svingninger, tvungne svingninger, grunn/egenfrekvens, resonans, Q faktor, koblede oscillatorer

**14 Følg strømmen**..... 151

LÆRINGSUTBYTTE: Arkimedes lov, oppdrift, trykk, pascal, barometerligningen, kompressibilitet, trykkfordeling i inkompressibel væske, hydraulisk jekk, stabilitet, oppdriftssenter, fluid, stasjonær strøm, kontinuitetsligningen, Bernoullis ligning, flyging og løft, venturirør, Torricellis lov, indre friksjon, skjærkrefter, viskositet, laminær strøm, Poiseuilles lov, turbulens, Reynoldstall, kompressibel gass, Mach-tall

**15 Odde oppgaver**..... 173

LÆRINGSUTBYTTE: Bruke kunnskaper til å løse oppgaver

**16 Amors piler**..... 199

LÆRINGSUTBYTTE: Vektorer, forskyvningsvektor, retning, størrelse, skalar, vektor, vektoraddisjon, vektorsubtraksjon, enhetsvektorer, komponentvektorer, skalarprodukt, kryssprodukt, høyrehåndsregel, høyrehånds koordinatsystem, posisjonsvektor

**17 Alt er i endring**..... 209

LÆRINGSUTBYTTE: Kinematikk, bevegelsesdiagram, sammenheng mellom posisjon, hastighet og akselerasjon, definisjon av hastighet og akselerasjon, retlinjet bevegelse med konstant akselerasjon, sirkelbevegelse med konstant fart, skrått kast

**18 Linjeintegral og konservative krefter**..... 221

LÆRINGSUTBYTTE: Linjeintegral, konservative krefter, energi og potensial

**19 Et graverende eksempel**..... 227

LÆRINGSUTBYTTE: Gravitasjon, Keplers lover, utledning av gravitasjonsloven med hjelp av Newton, gravitasjonskonstanten, total mekanisk energi, gravitasjonspotensial, effektivt gravitasjonspotensial, energibrønn, ulike banetyper, sammenhengen mellom spinn og energi og flatekonstanten, unnslipningshastighet

20	Sånn sett.....	247
	LÆRINGSUTBYTTE: Galileitransformasjon, inertialsystemer, absolutt tid, lorentztransformasjon, akselererte systemer, fiktive krefter, ekvivalensprinsippet, roterende koordinatsystemer, sentrifugalkraft, corioliskraft og eulerkraft	
21	Løsningsforslag til odde oppgaver.....	257
	LÆRINGSUTBYTTE: Bruke kunnskaper til å løse oppgaver	
22	For moro skyld .....	345
	LÆRINGSUTBYTTE: Prinsippet om minste virkning, virkning, Lagrange, variasjonsregning, Euler-Lagrange ligningen, gjensyn med Newtons andre lov, innledende øvelse løst med Lagrangeformalisme	
	Definisjoner m.m.....	351
	Definisjoner .....	351
	Enheter .....	356
	Konstanter.....	357
	En liten mekanikk formelsamling .....	357
	Det greske alfabet.....	362
	Litteraturliste og kilder.....	363
	Litteraturliste .....	363
	Kilder.....	364
	Fasit til Odde oppgaver.....	365
	Stikkord.....	377

## Kapittel 1

---

# Møt familien

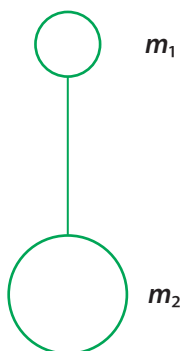
«All life is an experiment.  
The more experiments you make the better.»

Ralph Waldo Emerson (1803–1882)

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Nytten og gleden av snordraget som veiviser i klassisk mekanikk, tankeeksperiment, system og omgivelser, Newtons lover og bevaringslover, snoren, den masseløse snor, klossen, loddet, trinsen, fjæren, dimensjonsanalyse

---



**Figur 1.1** Kuler i fritt fall fra et tårn.  $m_2$  er tyngre enn  $m_1$

**Ralph Waldo Emerson har helt rett. Det som alle fysikere har til felles, er gleden av eksperimenter, nemlig tankeeksperimenter. Store fysikere fra Galileo Galilei via Isaac Newton til Albert Einstein brukte tankene for alt det de var verd. Tankeeksperimenter er kosteffektive og kan få frem nye ideer og teorier som kan etterprøves med målinger.**

Du har kanskje hørt historien om Galileo Galilei som slapp to legemer med forskjellig tyngde fra det skjeve tårn i Pisa for å demonstrere at de falt like fort til bakken. På den måten fikk han forkastet Aristoteles' to tusen år gamle teori, som ingen hadde etterprøvd, om at legemers fallhastighet var proporsjonal med deres masse, utstrekning og orientering. De fleste historikere stiller seg tvilende til at Galilei gjorde dette forsøket. Det vi med sikkerhet vet, er at han tenkte et kanskje enda mer overbevisende tankeeksperiment i boken *De Motu (Om bevegelse)*. Det påstås at Galilei var den første som tok i bruk tankeeksperimenter i fysikk. Tankeeksperimentet inneholder til alt overmål vårt kjære snordrag.

Eksperimenter går som følger: «Se for deg to legemer, ett lett og ett tyngre enn det andre, forbundet med en snor. Slipp det hele, systemet, fra toppen av et tårn. Hvis vi antar at tyngre legemer faller raskere enn lettere (og omvendt at lettere legemer faller saktere), så vil snoren strammes hardt siden det lettere legemet vil bremse det tyngre. Men hele systemet er jo tyngre enn det tyngste legemet alene, og skulle dermed falle raskere. Denne motsigelsen får en til å konkludere at forutsetningen var gal». Dette tankeeksperimentet er strålende. Det beviser ved «*Reductio ad absurdum*» (latin for «tilbakeførsel til det meningsløse») at legemer faller med samme hastighet i fritt fall. Skulle du mot formodning fremdeles ikke være på parti med Galileo Galilei, så kan du se det utført på månen, hvor det ikke er atmosfære, av David Scott under Apollo 15 ferden (moon hammer feather gjør underverker i Internettets søkemotorer, og du får gleden av å se en video fra månen).

Det Galilei ikke tok stilling til i sitt tankeeksperiment, var luftmotstanden. Er det mulig å tenke seg hva som ville skje dersom en hadde luftmotstand i det frie fallet? Det er ikke nødvendig å tenke engang. Jeg har sett hva som skjer med egne øyne. Som liten gutt bodde jeg ved en flyplass og hadde gleden av å se på fallskjermhopping. Fallskjermhopperen og skjermen kan ses på som det tunge og det lette legemet. De faller med samme hastighet og vil til slutt nå en øvre konstant hastighet kalt terminalhastighet. Det skjer når kraften fra luftmotstanden er like stor som tyngden, men motsatt rettet, og er bestemt av fallskjermhopperens utstrekning. Så løses skjermen ut og gir stor luftmotstand, og en ny, lavere terminalhastighet oppnås gitt av fallskjermens areal. Galilei sitt tankeeksperiment blir altså feil dersom vi også tar hensyn til luftmotstand.

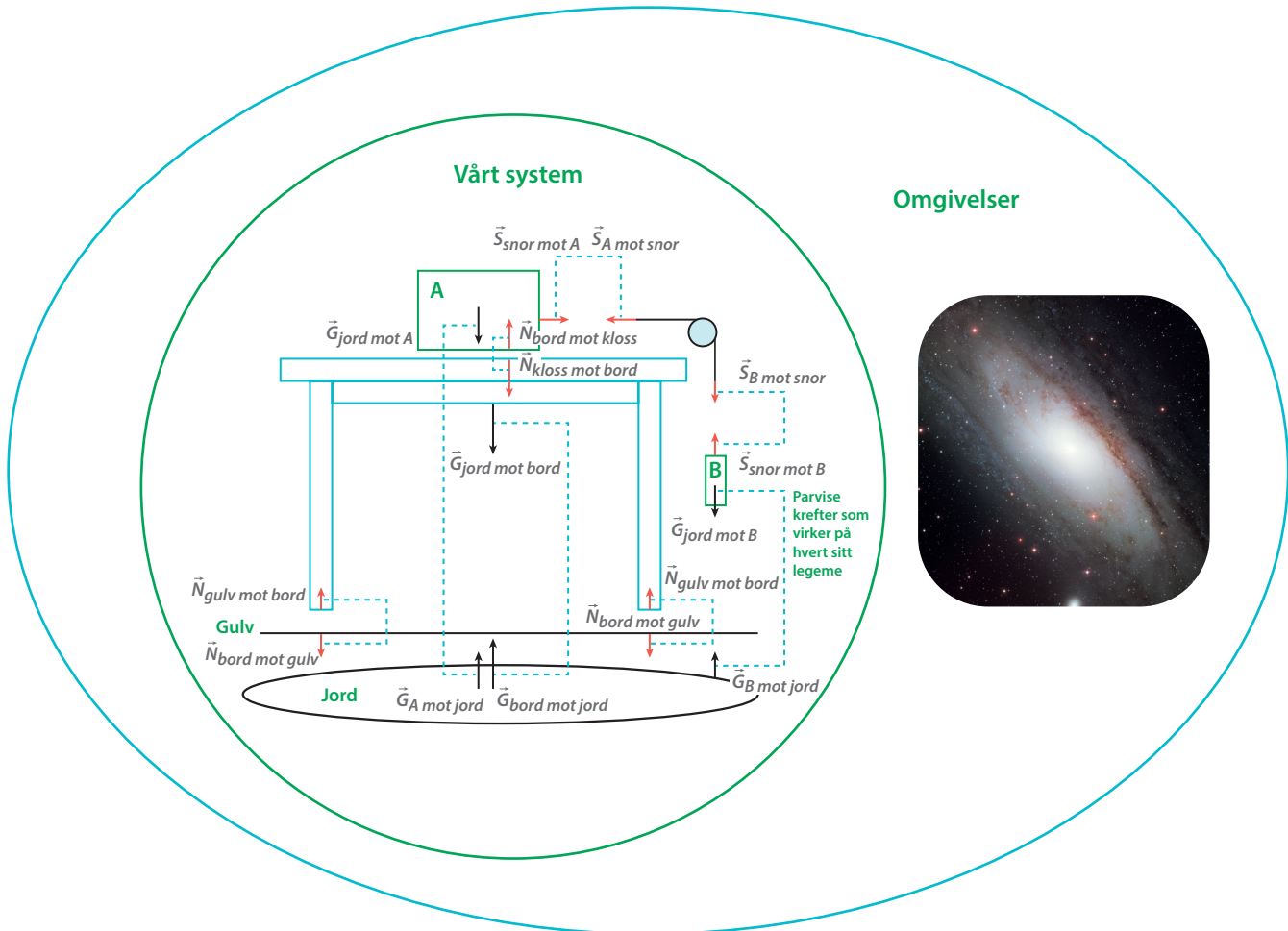
Vi skal begrense oss til den klassiske mekanikken og bruke snorer, klosser, lodd, trinser, kuler og fjærer for å lære oss så mye som mulig. Jeg skal vel være så ærlig



å innrømme at de fleste forsøkene vi skal gjøre i boken, er tankeeksperimenter. De kan selvsagt alle utføres som eksperimenter, og kostnadene ville ikke vært store. Problemet er at en aldri har tid nok i skolen til å gjøre disse øvelsene. Kanskje du skulle gå til innkjøp av disse enkle remediene vi skal bruke, og etterprøve våre utregnede resultater.

Familien vi skal stifte bekjentskap med, er snoren, klossen, loddet, trinsen, kulen og fjæren. Det er en liten familie, men stor nok til å etterprøve naturens husregler. Disse husreglene består av Newtons tre lover og tre bevaringslover.

I fysikk er verden enkel. Den deles som regel i to – systemet vi er interessert i å undersøke, og omgivelsene (Figur 1.2). Dersom vårt system er lukket fra omgivelsene, gjelder husreglene innenfor systemet.



**Figur 1.2** Verden sett med fysikkens øyne

**Newton's lover:**

**Newton's første lov:** Når summen av alle krefter, resultantkraften, som virker på et legeme er lik null, er legemet i ro eller i rettlinjett bevegelse med konstant hastighet.  $\vec{F}_{res} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$ .

**Newton's andre lov:** Når et legeme blir påvirket av krefter, får legemet en akselerasjon som har samme retning som summen av alle krefter, resultantkraften, som virker på legemet. Resultantkraften er lik massen til legemet multiplisert med akselerasjonen til legemet.  $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ .

**Newton's tredje lov:** Når et legeme A blir påvirket av en kraft  $\vec{F}_{B \text{ på } A}$  fra et legeme B, blir B påvirket av en kraft  $\vec{F}_{A \text{ på } B}$ . De to kreftene er like store, men motsatt rettet:  $\vec{F}_{B \text{ på } A} = -\vec{F}_{A \text{ på } B}$ .

**Bevaringslover:**

**Bevaring av bevegelsesmengde:** Dersom summen av alle krefter som virker på et system er null, da er den totale bevegelsesmengde konstant.  $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \dots = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + \dots = \text{konstant}$ .

**Bevaring av mekanisk energi:** I et isolert system er energien bevart. Energien består av kinetisk  $E_k$  og potensiell  $E_p$  energi.  $U = E_{kA} + E_{pA} + E_{kB} + E_{pB} + \dots = \text{konstant}$ .

**Bevaring av spinn:** Når summen av kraftmoment som virker på et system er lik null, da er det totale spinn konstant (konserververt).  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) + \dots = \text{konstant}$ .

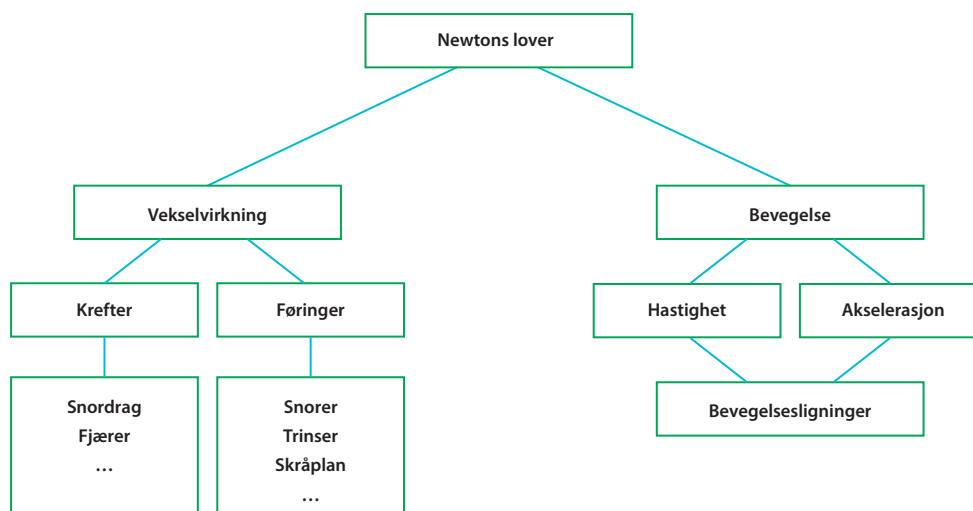
Seks regler som er lette å lese, men verre å forstå. Vi skal bruke snordraget sammen med klosser, lodd, trinser og fjærer for å skjønne disse lovene og hvilke konsekvenser de får.

Oi, her var det mange nye begreper på en gang. Dersom du finner begreper underveis mens du leser, er det bare å slå opp i «Definisjoner m.m.» i **Appendiks**. Siden dette er første gang, skal jeg være grei og la definisjonene komme til deg.

Tabell 1.1 Et utvalg av definisjoner

Størrelse	Definisjon (Kilde: <a href="http://www.snl.no">www.snl.no</a> )
Hastighet	Hastighet definert som posisjonsendring delt på tid $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .
Fart	Fart er størrelsen til hastighet.
Akselerasjon	Akselerasjon er hastighetsendring per tid. Hvis farten til en gjenstand øker, er akselerasjonen positiv, og hvis farten avtar, er akselerasjonen negativ. Negativ akselerasjon kalles også <i>retardasjon</i> $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ .
Masse	Masse er en egenskap som alt stoff har, og som gjør at stoffet har treghet og tyngde (gravitasjon). Vanlig symbol for masse er $m$ .
Bevegelsesmengde	Bevegelsesmengde er produktet av masse og hastighet.
Treghet	Treghet, den egenskap ved enhver gjenstand at den vil motsette seg å bli satt i bevegelse eller å få hastigheten forandret. Bevegelse eller endring i bevegelsen kan bare komme i stand ved ytre krefter som virker på gjenstanden. <i>Treghetsloven, Newtons første lov</i> , formuleres gjerne ved å si at et legeme beholder sin hastighet både i verdi (også null) og i retning hvis det ikke virker krefter på legemet, eller hvis summen av kreftene er null.
Kraft	Kraft er en påvirkning på en gjenstand som kan deformere gjenstanden, for eksempel klemme den flat eller strekke den eller endre bevegelsestilstanden til gjenstanden $\vec{F} = m\vec{a}$ .
Konservativ kraft	Konservativ kraft, en kraft som er slik at arbeidet kraften har utført på en partikkel er null når partikkelen kommer tilbake til startpunktet, uansett hvilken bane partikkelen har fulgt.
Arbeid	Arbeid er en form for energioverføring ved at en kraft virker på en gjenstand.
Energi	Energi er det samme som evne til å utføre arbeid, og måleenheten for energi er den samme som for arbeid (joule).
Kinetisk energi	Kinetisk energi, også kalt bevegelsesenergi, er den energien en gjenstand har på grunn av hastigheten sin. Denne energien er lik det arbeidet som må gjøres for å akselerere legemet fra ro til den farten det har. Et legeme i ro har ingen kinetisk energi.
Potensiell energi	Potensiell energi, lagret eller oppspart energi som kan frigjøres.
Mekanisk energi	Summen av et legemes kinetiske og potensielle energi. Et legeme som bare er påvirket av en konservativ kraft, har konstant mekanisk energi.
Spinn	Spinn (drivmoment, dreieimpuls, vinkelmoment, rotasjonsmengde eller bevegelsesmengdemoment) er en fysisk størrelse som skildrer rotasjonstilstanden til et system eller et legeme rundt et sentrum.

I Figur 1.3 ser du en måte å strukturere kunnskapen på i klassisk mekanikk. Det er skilt mellom vekselvirkning og bevegelse, og under vekselvirkning er det igjen avgrenset mellom krefter og føringer.

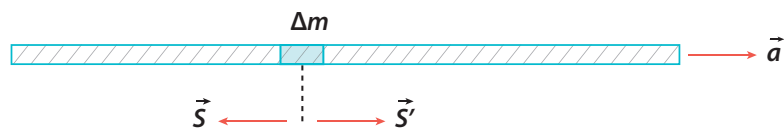


**Figur 1.3** Kunnskapsstruktur for klassisk mekanikk

Snoren er, som vi allerede har sett, et nyttig verktøy for å fravriste naturen dens lover. Snoren dukker opp i mange eksperimenter som etterprøver fysiske sammenhenger. Snoren kan brukes til å teste alle Newtons tre lover og bevaring av bevegelsesmengde, energi og spinn. Selvfølgelig finnes det noen områder hvor snoren kommer til kort i den klassiske mekanikk – høy-energi-dynamikk og systemer med veldig mange partikler. Trøsten er at når du har lært det som snoren kan hjelpe deg med, så er det lett å skjønne denne lille biten som mangler.

Figur 1.4 viser et stykke av en snor som akselererer med en akselerasjon  $\vec{a}$  mot høyre. Dersom du ikke har vært borte i vektorielle størrelser som  $\vec{a}$ , foreslår jeg at du tar en rask kikk på kapittelet «Amors piler» i **Appendiks**. På snorelementet  $\Delta m$  virker kreftene  $\vec{S}$  og  $\vec{S}'$ . Newtons andre lov gir:

$$S' - S = \Delta m a \quad (1.1)$$

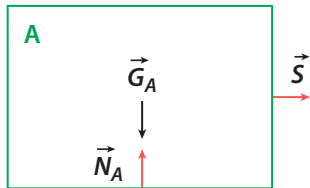


**Figur 1.4** Snor med krefter og akselerasjon inntegnet

I formel (1.1) har vi droppet vektornotasjonen da vi ser kun langs en akse.  $S'$  er større enn  $S$ , og det gir snoren en akselerasjon  $a$  mot høyre. Vi skal i våre eksperimenter ofte bruke ikke-deformerbar snor uten masse. Du synes kanskje det er en underlig konstruksjon, men det er en nyttig og rimelig tilnærming i de oppgavene vi skal løse. Da ser du at:

$$S' - S = \Delta ma = 0 \cdot a = 0 \quad (1.2)$$

$$S' = S \quad (1.3)$$

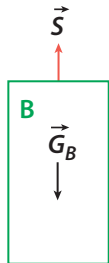


**Figur 1.5** Krefter som virker på en kloss A som dras av et snordrag  $\vec{S}$ , har en tyngde  $\vec{G}_A$  og en normalkraft fra underlaget  $\vec{N}_A$

Samme hvilken verdi akselerasjonen har, så blir snordraget i den masseløse snoren likt overalt. Snordraget er en kraft, og snoren er en effektiv måte å transportere krefter på.

Klossene vi skal bruke har masse og er av to ulike typer. Den første typen er en ideell kloss som ikke har noen friksjon mot underlag, og den andre typen er utsatt for friksjon. Klossene brukes i eksperimenter sammen med snorer eller når ting skal skyves. I Figur 1.5 ser man en kloss på et underlag utsatt for krefter.

Lodd med masse brukes til å trekke noe nedover. Ofte er loddet forbundet med en eller flere klosser over en trinse ved hjelp av en snor (se Figur 1.2). Dersom loddet henger i en snor, blir det utsatt for tyngdekraft og snordrag som vist i Figur 1.6.



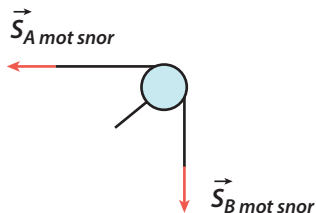
**Figur 1.6** Krefter som virker på et lodd B som har en tyngde  $\vec{G}_B$  og et snordrag  $\vec{S}$  som virker mot tyngden

Trinsene brukes til å gi snorene nye retninger slik du for eksempel ser i Figur 1.2. Vi starter for enkelhets skyld med trinser uten masse, men senere når vi skal lære oss rotasjon, lar vi trinsen også få masse. Figur 1.7 viser en masseløs trinse.

De kulene vi skal se på er fullstendig stive legemer, og vi skal bruke dem i forbindelse med elastiske støt og energibevaring. Figur 1.8 viser en biljardkule som er tilnærmet et stivt legeme.

Fjæren er det siste familiemedlemmet. Den er nyttig når en skal se på sammenhengen mellom arbeid og energi samt harmoniske svingninger. For å gjøre livet lettere skal vi se på masseløse fjærer uten demping. Figur 1.9 viser en typisk fjær.

Med denne familien og dens husregler er det mulig å dekke og forstå de viktigste emnene i den klassiske mekanikken.



**Figur 1.7** Krefter som virker på en masseløs trinse. De to snordragene er like fordi trinsen er masseløs



**Figur 1.8** Biljardkule er omtrent et stivt legeme



**Figur 1.9** Fjær

Ja, det var en ting til – dimensjonsanalyse. Dimensjonsanalyse er et godt verktøy når du skal sjekke om det du kommer frem til er riktig svar. Har du for eksempel funnet et uttrykk for fart:

$$v = \text{et eller annet matematisk uttrykk} \quad (1.4)$$

Så setter du inn tall og enheter for det som er med i «et eller annet» og resultatet må da bli noe som gir meter per sekund. Får du noe annet, er det en rimelig grei indikasjon på at noe er regnet feil underveis. Dimensjonsanalyse er spesielt nyttig når uttrykkene blir store og kompliserte, men gjør det til en vane å foreta det hele tiden.

## Kapittel 2

---

# Innledende øvelse

«Mangt skal vi møte, og mangt skal vi mestre.  
Dagen i dag, den kan bli vår beste dag.»

*Grip dagen, Erik Bye (1926–2004)*

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Krefter, snordrag, Newtons lover, massesenter, den viktige forskjellen mellom Newtons tredje lov og de to første

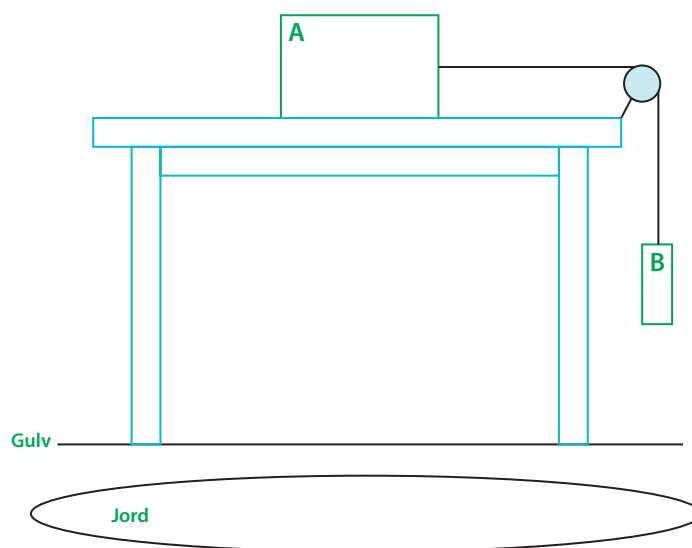
---

«Gå og sett deg!» Vår professor i klassisk mekanikk slår seg til pannen i fortvilelse mens jeg skamfull setter meg ned på de harde trebenkene i fysikkbygningen på Blindern. Hvorfor strømmer disse 35 år gamle vonde minnene på nå midt under festmiddagen med hyggelige kollegaer? Vel, jordmoren rett overfor har nettopp fortalt entusiastisk om sitt yrke og profesjon og spør meg hvilken utdanning jeg har. Jeg nøler litt. «Fysiker». «Ja, jeg likte også fysikk på gymnaset, men så var det dette uforståelige snordraget. Jeg skjønnte aldri forklaringene jeg fikk».

Jeg tenker i mitt stille sinn at snordraget nok har vært fødselshjelp for mange alternative karrierer. Strålende! Jeg har til dags dato ikke møtt et menneske som har proklamert at hun eller han elsker snordraget. Mishagsytringer derimot har det vært flust av. Som student hadde jeg gleden av å lære en ny måte å formulere mekanikk på, nemlig basert på prinsippet om minste virkning med dertil hørende vakker Hamilton- og Lagrange-formalisme. Men hva hjelper det med nytt og avansert verktøy når en mangler grunnleggende forståelse? Det er som å gi en CNC-maskin til en treskjærerlærling som ikke har noen følelse for treets natur og heller aldri har brukt et treskjærerjern. Min oppgave den gang var den klassiske med kloss og lodd med snor imellom.

Forsøket endte i fritt fall fornedrelse. Her var det bare å rykke tilbake til start. Jeg bøyer meg over bordet mot jordmoren og hvisker noe nesten uhørt: «Kanskje de som prøvde å forklare deg snordraget ikke skjønnte det selv? Muligens snakker vi her om en kjede av misforståelser siden Newton fikk draget med sine krefter».

La oss prøve på nytt. I Figur 2.1 har vi en kloss A med masse  $m_A$  og et lodd B med masse  $m_B$ . Bordet er svært glatt, snoren svært lett og trinsen masseløs og uten friksjon.



Figur 2.1 Klassisk snordragsoppgave



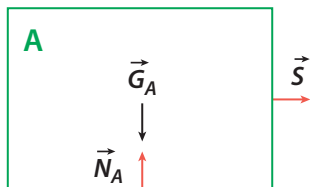
- Tegn figur med alle kreftene som virker på kloss og lodd
- Forklar tydelig hvordan du regner ut akselerasjonen for klossen. Finn formel
- Finn snorkraften (snordraget) på klossen og loddet
- Vi stanser klossen og holder den i ro. Hvor stor blir snorkraften da?

Før vi begynner, kan det være betimelig å spørre seg selv hvorfor vi skal løse slike oppgaver. Hva er det som skal læres? Er det fornuftig å bruke tid på dette? Til det kan det svares et rungende ja. Snordragsoppgaver er en god innfallsport til å forstå Newtons lover og den klassiske mekanikk.

Hva er kraft? I fysikk er kraft det som kan endre et legemes bevegelsestilstand eller deformere det. Vi skal her se på sammenhengen mellom krefter og akselerasjon. Akselerasjon er hastighetsendring. Hva vil skje når det hele slippes løs? Loddet B vil falle med en jevn akselerasjon som er mindre enn tyngdens akselerasjon siden det må dra på klossen A.

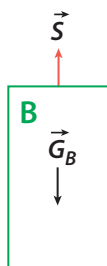
I denne oppgaven får en opplyst at bordet er svært glatt, snoren svært lett og trinsen masseløs. Det gjør det hele enklere. Det vil altså ikke være noen friksjon mellom kloss og bord, vekten av snoren kan vi se bort fra og vi kan glemme trinsens innvirkning på regnestykket da den er masseløs. Vi skal senere se hvilken betydning friksjon og en trinse med masse ville fått for regnestykket, og samtidig lære en god del om både friksjon og rotasjon av stive legemer. Forresten: Et stivt legeme kan ikke deformeres.

Det første vi blir bedt om å gjøre, er å tegne alle kreftene som virker på kloss og lodd. La oss starte med klossen A. Tyngdekraften  $\vec{G}_A = m_A \vec{g}$  hvor  $\vec{g}$  er tyngdens akselerasjon, vil trykke den ned mot bordplaten, og bordplaten vil trykke med like stor og motsatt rettet kraft  $\vec{N}_A$  da klossen ikke beveger seg i vertikal retning. I horisontal retning vil snoren dra med en kraft  $\vec{S}$ . Kraftene er blitt dekorert med en pil for å vise at de er vektorer. Har du ikke vært borte i vektorer før, så kan det være lurt å kikke i kapitlet «Amors piler» i appendiks. I Figur 2.2 ser du kreftene som virker på klossen. Kraftenes angrepspunkt, størrelse og retning er angitt med de fargede pilene. Tyngdekraften  $\vec{G}_A$  er tegnet i sentrum av klossen da det er tyngdepunktet (massesenteret) til klossen. Tyngdekraften virker selvfølgelig på hver liten del av klossen, og summen av disse kreftene er like stor som den vi har tegnet i massesenteret. Dersom du ikke har vært borte i tyngdekraft og gravitasjon før, kan en titt i kapitlet «Et graverende eksempel» i appendiks være nyttig. Kraften  $\vec{N}_A$  fra bordplaten kalles normalkraften og tegnes på midten av klossens underside. Snorens drag  $\vec{S}$  tegnes fra snorens angrepspunkt. Tyngdekraften er tegnet med svart pil.



**Figur 2.2** Krefter som virker på klossen

Når vi lager en slik figur av et legeme som i Figur 2.2, kalles det et **frilegemediagram**. Å lage frilegemediagram for de legemene en skal studere, er en meget god måte å holde orden på problemet som skal løses. Med frilegemediagram deler vi nå verden inn i to:



**Figur 3.3** Krefter som virker på loddet

klossen som blir påvirket av ytre krefter, og klossens omgivelser. Klossen blir **systemet** de ytre krefter virker på. I Figur 2.2 ser vi de ytre kreftene som virker på klossen. Av frilegemediagrammet ser vi at klossen vil bli dratt mot høyre med en kraft  $\vec{S}$ .

Så skal samme øvelse utføres for loddet B. I Figur 2.3 er frilegemediagrammet for loddet gitt. Samme symbol for snordraget  $\vec{S}$  brukes i begge ender av snoren.

Da har vi gjort det vi har blitt bedt om i a) og er godt skodd for å gå videre med de neste oppgavene. I b) blir vi utfordret til å finne formelen for akselerasjon av klossen. En viktig observasjon i dette tilfellet er at kloss og lodd vil ha samme akselerasjon da de henger sammen med en snor. For å finne akselerasjonen får vi gleden av å ta i bruk **Newtons andre lov**:

**Newtons andre lov: Når et legeme blir påvirket av krefter, får legemet en akselerasjon som har samme retning som summen av alle krefter, resultantkraften, som virker på legemet. Resultantkraften er lik massen multiplisert med akselerasjon.  $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ .**

Vi ser at massen i Newtons andre lov er en proporsjonalitetsfaktor mellom kraften på et legeme og akselerasjonen det får. Jo større masse, jo vanskeligere er det å få endret legemets bevegelse. Denne egenskapen som legemene har til å motsette seg bevegelsesendring, kalles treghet.

Tilbake til oppgave b). For klossen vil resultantkraften være lik  $\vec{S}$ . Siden vi i oppgaven driver med rettlinjett bevegelse enten langs bordet eller loddrett nedover, kan vi droppe vektorsymbolene og skrive Newtons andre lov anvendt på klossen:

$$S = m_A a \quad (2.1)$$

For å finne akselerasjonen må ligningen løses med hensyn på akselerasjonen:

$$a = \frac{S}{m_A} \quad (2.2)$$

Utfordringen her er at vi ikke kjenner snordragets størrelse. For å komme videre kan vi utnytte det faktum at kloss og lodd har samme akselerasjon. Summen av krefter som virker på loddet er  $G_B - S$ . Minustegnet foran snordraget  $S$  skyldes at snordraget virker i motsatt retning av tyngdekraften. Newtons andre lov benyttet på loddet gir oss:

$$a = \frac{G_B - S}{m_B} \quad (2.3)$$

Vi har nå to ligninger (2.1) og (2.3) med to ukjente  $a$  og  $S$ . Ved å løse ligningssettet med hensyn på  $a$  får vi:

$$a = \frac{G_B - m_A a}{m_B} \quad (2.4)$$

$$m_A a + m_B a = G_B \quad (2.5)$$

$$a = \frac{G_B}{m_A + m_B} = \frac{m_B}{m_A + m_B} g \quad (2.6)$$

Liten  $g$  er tyngdens akselerasjon som er  $9,81 \text{ m/s}^2$  på jorden. Er resultatet rimelig? La oss sjekke ved å gå til ytterligheter. Jo større klossens masse  $m_A$  blir, jo mindre blir akselerasjonen, og det er som forventet. Blir klossens masse lik 0, vil loddet falle med tyngdens akselerasjon – igjen som antatt. Formelen (2.6) for akselerasjon  $a$  som vi har kommet frem til, virker tilforlåtelig.

I oppgave c) skal vi finne snordraget på kloss og lodd. Den observante leser har nok allerede sett at vi for å finne akselerasjonen antok at snordraget var likt på kloss og lodd. Er det rimelig å gå ut ifra? Ja, så lenge snor og trinse er masseløse, er snordraget likt i begge ender. Da er det bare å kaste seg over ligningene igjen, men denne gangen løse med hensyn på  $S$ . Fra (2.1) har vi:

$$S = m_A a \quad (2.7)$$

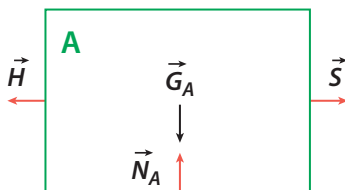
Det kan settes sammen med akselerasjonen vi fant et uttrykk for i (2.6), og vips så har vi funnet snordraget:

$$S = m_A \frac{m_B}{m_A + m_B} g = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g \quad (2.8)$$

Vi ser at når klossen A sin masse blir liten, nærmer snordraget seg 0 og loddet B vil falle med tilnærmet tyngdens akselerasjon  $g$  da ingenting hindrer det fra å falle fritt. Dersom klossens masse blir stor, vil snordraget nærme seg  $G_B$ . Det kan vi se ved en liten omskriving av ligning (2.8):

$$S = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g = m_B \frac{\frac{m_A}{m_B}}{1 + \frac{m_A}{m_B}} g = G_B \frac{1}{1 + \frac{m_A}{m_B}} \approx G_B \quad (2.9)$$

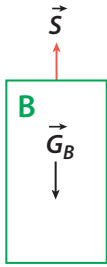
$\frac{m_B}{m_A}$  blir et lite tall når klossens masse er vesentlig større enn loddets masse.



**Figur 2.4** Krefter som virker på klossen når den er i ro

Kun én oppgave igjen. I d) skal vi stanse og holde blokken i ro og finne ut hva snordraget da blir. La oss gå tilbake til frilegemediagrammet og tegne inn kraften som må til for at klossen skal være i ro.

Kraften vi holder med er gitt navnet  $\vec{H}$  for hånd. Vi ser at summen av alle krefter på legemet er null, og da beveger det seg ikke siden vi har stanset klossen. Det vi ser er **Newtons første lov** i full utfoldelse.



**Figur 2.5** Krefter som virker på loddet når det er i ro

**Newtons første lov:** Når summen av alle krefter, resultantkraften, som virker på et legeme er lik null, er legemet i ro eller i rettlinjett bevegelse med konstant hastighet.  $\vec{F}_{res} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$ .

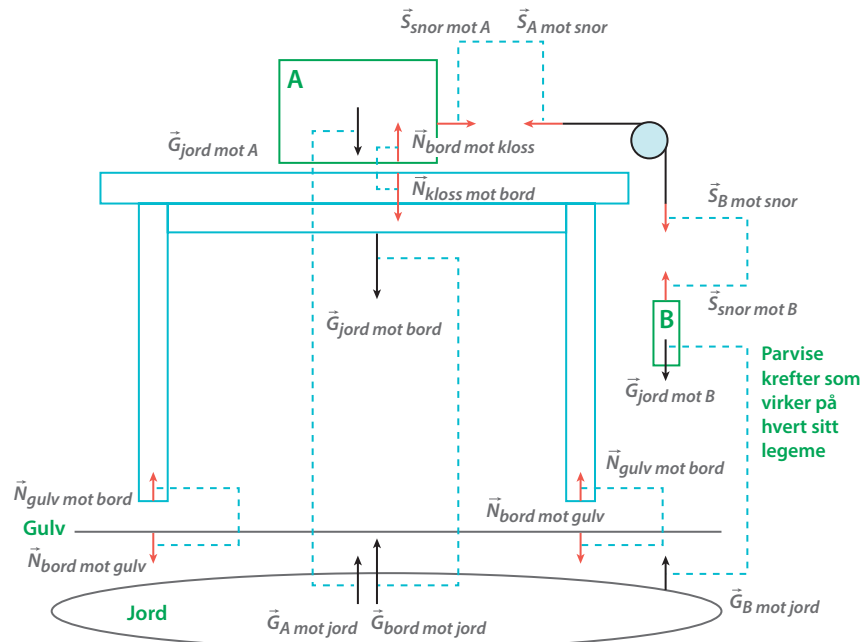
$\vec{v}$  er hastighet. Vårt legeme, klossen, er i ro siden  $\vec{H} = -\vec{S}$ , men hvor stor er  $\vec{S}$ ? For å finne ut det må vi tegne et nytt frilegemediagram for loddet.

Loddet er nødt til å være i ro når klossen er i ro, siden de er forbundet med snoren. For å få loddet til å være i ro må  $S$  og  $G_B$  være like store og motsatt rettet ifølge Newtons første lov. Snordraget er altså:

$$S = G_B \quad (2.10)$$

Dette resultatet så vi indirekte da klossens masse ble stor i forhold til loddet (2.9), for da ville systemet kloss og lodd tilnærmet være i ro med  $S = G_B$ .

Da er vi i mål med oppgaven. Er det mulig å hente ut mer fysikk av den? Hva med å tegne alle kreftene som virker i Figur 2.1? I Figur 2.6 ser du resultatet. Der er alle legemer tegnet med frilegemediagram. Vi ser bort fra trinsen da den ikke bidrar. Av figuren ser en at kreftene kommer parvis, på hvert sitt legeme, like store og motsatt rettet. Kreftene som hører sammen, har fått en stiplede linje mellom seg for at en skal se at de hører sammen. Der hvor pilparene peker mot hverandre, har man drag, og når de peker fra hverandre, er det skyv.



**Figur 2.6** Alle krefter som virker i vårt system

Dersom vi ser bort fra resten av universet, kan vi kalle vårt system med bord, jord og tilhørende herligheter for et isolert system. Et isolert system har ingen ytre krefter som virker på det, kun indre krefter som kommer parvis og utligner hverandre. Dette er en konsekvens av Newtons tredje lov.

**Newtons tredje lov:** Når et legeme A blir påvirket av en kraft  $\vec{F}_{B \text{ på } A}$  fra et legeme B, blir B påvirket av en kraft  $\vec{F}_{A \text{ på } B}$ . De to kreftene er like store, men motsatt rettet:  $\vec{F}_{B \text{ på } A} = -\vec{F}_{A \text{ på } B}$ .

En annen måte å si det samme på er at enhver kraft er medlem av et kraftpar, og medlemmene virker på ulike legemer.

**NB!** Det er en viktig forskjell mellom Newtons første og andre lov og den siste. Newtons første og andre lov angår ett legeme, mens Newtons tredje lov handler om samspillet mellom to legemer. Frilegemediagram bruker vi når vi ser på ett legeme og anvender Newtons første eller andre lov. Newtons tredje lov handler om samspillet mellom krefter på to forskjellige legemer.

Nøkkelen til suksess i møte med klassisk mekanikk er å forstå og bruke denne vesentlige forskjellen mellom Newtons tredje og de to første. Derfor bør du bruke en del tid på å tegne fullstendige system hvor alle kraftpar er med slik som Figur 2.6 når du løser oppgaver. Det vil lønne seg i det lange løp.



# 3

## Kapittel 3

---

# Systematisk til verks

«Som perler på en snor.»

*Ordtak, Anonym*

---

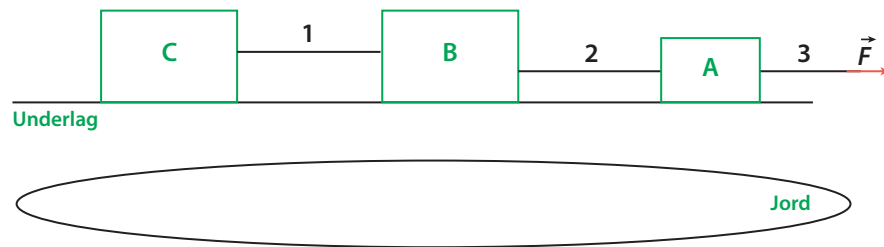
**LÆRINGSUTBYTTE:** Løsningsstrategi, system, omgivelser, frilegemediagram, snordrag med mange klosser, snor med masse

---

Lett nedtrykt tok jeg turen inn til en kollega. Tilbakemeldingene på kurset jeg hadde holdt i Oslo, var at det var altfor mange formler. Jeg delte frustrasjonen med min gode medarbeider. Han så på meg og smilte: «Husk Per, at det er når vi ikke har formler, at det virkelig er vanskelig».

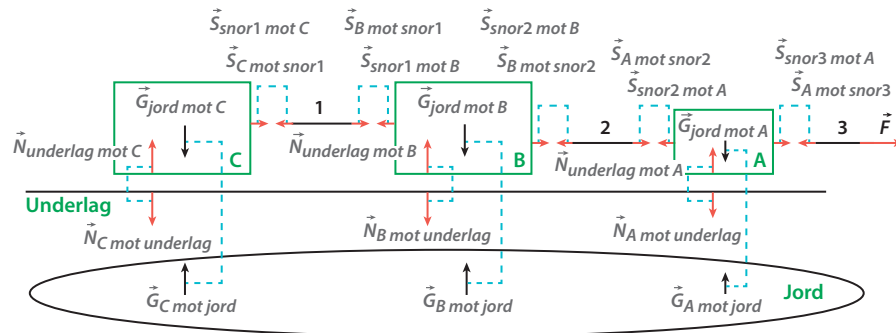
Mange forbinder fysikk med formler, mange formler. Faktum er at formlene kommer helt til slutt, etter at vi har tegnet og tenkt. La oss ta en snordragsoppgave som eksempel på hvordan en kan gå systematisk til verks når fysikkoppgaver skal løses.

Oppgave: I Figur 3.1 ser du tre klosser A, B og C som henger sammen ved hjelp av masseløse snorer (1, 2 og 3), og dras friksjonsløst mot høyre med en kraft  $\vec{F}$ . Hvor er snordraget størst, eller er det likt overalt?



**Figur 3.1** Tre klosser som dras med en kraft  $\vec{F}$

La oss starte litt omstendelig å tegne inn alle krefter som virker som kraftpar ved å bruke Newtons tredje lov.



**Figur 3.2** Alle kreftene som virker

Vi ser at de parvise kreftene er like store, motsatt rettet og virker på hvert sitt legeme. Her er det kun en kraft  $\vec{F}$  som ikke kommer parvis, og det er den ytre kraften som virker på de tre klossene.

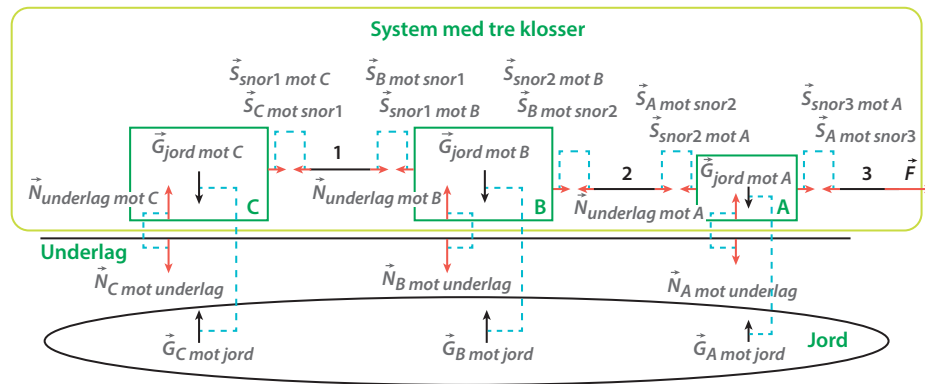
Så må vi ha en løsningsstrategi. Når en skal analysere systemer, er følgende prosedyre gitt i Tabell 3.1 [3] meget nyttig:



Tabell 3.1 Løsningsstrategi

#	Løsningsrekkefølge
1.	Separer objektene (legemene) inn i «systemer av interesse» og «omgivelsene»
2.	Tegn hvert system <i>separert</i> fra alle andre systemer og omgivelsene
3.	Identifiser og tegn alle krefter på hvert system
4.	Identifiser kraftpar (aksjon/reaksjon) mellom systemer. Verifiser at de to kreftene virker på <i>ulike</i> objekter
5.	Tegn et separat frilegemediagram for hvert system. Et frilegemediagram inneholder kun krefter som virker på det gitte legemet. Bruk prikkede linjer for å binde sammen parvise krefter. Verifiser at de to kreftene som er bundet sammen av prikkede linjer, er på to <i>ulike</i> frilegemediagrammer

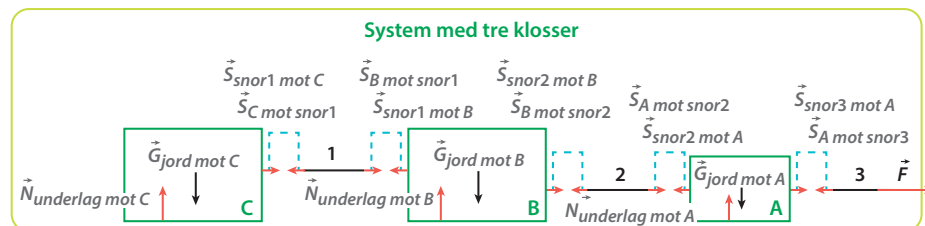
La oss bruke prosedyren på vår oppgave. Siden de tre klossene henger sammen, må de ha samme akselerasjon mot høyre. La oss derfor starte med å se på klossene A, B og C som et system, Figur 3.3, og la resten være omgivelser.



Figur 3.3 A, B og C som et system

Som du ser, har vi nå utført 1) ved å dele verden inn i de tre klossene og omgivelsene. Alt er tegnet separert fra hverandre, så da har vi allerede gjort 2). 3) er ferdig da alle krefter er tegnet inn, og 4) er tilfredsstilt med å tegne prikkede linjer. Vi ser også at de parvise kreftene virker på ulike objekter.

Da er det kun 5) som gjenstår. Vi må lage et frilegemediagram for vårt system med tre klosser, og det er vist i Figur 3.4.



Figur 3.4 Frilegemediagram for A, B og C

Mens vi brukte Newtons tredje lov til å finne alle krefter som virker, Figur 3.2, bruker en Newtons første eller andre lov på frilegemediagrammer. Figur 3.4 viser at de ytre kreftene i vertikal retning opphever hverandre. Det samme gjør snordragene. De er indre krefter i vårt system (snordragene er parvise og motsatt rettede krefter som skyldes Newtons tredje lov). Den eneste ytre kraften som får systemet til å akselerere er  $\vec{F}$ . Denne kraften er like stor som snordraget som virker på høyresiden av klossen A.

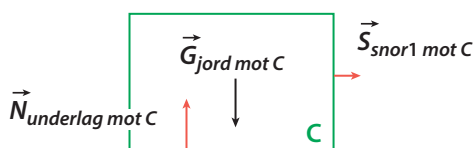
$$S_{\text{snor3 mot A}} = F \quad (3.1)$$

Systemets akselerasjon kan vi da finne ved å bruke Newtons andre lov.

$$F = (m_A + m_B + m_C)a \quad (3.2)$$

$$a = \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} \quad (3.3)$$

Hva er så snordraget på klossen C? La oss tegne et frilegemediagram, Figur 3.5, for C.

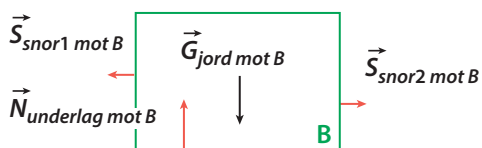


Også her opphever de vertikale kreftene hverandre, og vi står kun igjen med snordraget som ytre kraft på C. Vi vet allerede C sin akselerasjon som er den samme som alle klossene har, og da kan vi finne snordraget da vi vet massen til C ved hjelp av Newtons andre lov.

**Figur 3.5** Frilegemediagram for C

$$S_{\text{snor1 mot C}} = m_C \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} = \frac{m_C}{(m_A + m_B + m_C)} F \quad (3.4)$$

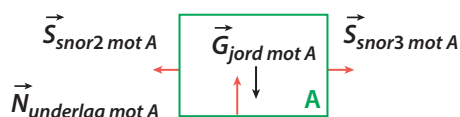
Vi ser at snordraget på C (3.4) er mindre enn snordraget på A sin høyre side (3.1). Det kan se ut som snordraget blir mindre jo lenger bak en kommer i kjeden av klosser.



**Figur 3.6** Frilegemediagram for B

La oss se hva snordraget blir på B. På venstresiden blir det likt, men motsatt rettet det på C,  $S_{\text{snor1 mot B}} = S_{\text{snor1 mot C}}$ , men hva med snordraget på høyresiden? Frilegemediagrammet for B er gjengitt i Figur 3.6.

$$S_{\text{snor2 mot B}} = m_B \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} + S_{\text{snor1 mot B}} = \frac{(m_B + m_C)}{(m_A + m_B + m_C)} F \quad (3.5)$$



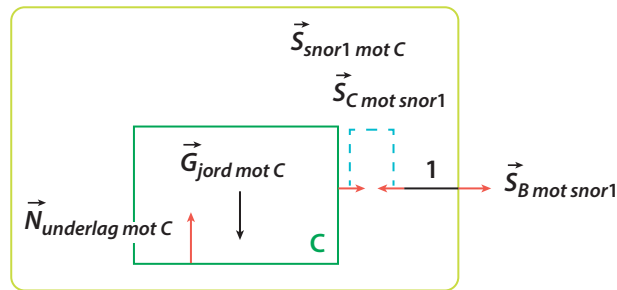
**Figur 3.7** Frilegemediagram for A

La oss for ordens skyld også regne ut snordraget på høyre siden av A. Igjen lager vi et frilegemediagram som vist i Figur 3.7.

$$S_{\text{snor3 mot A}} = m_a \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} + S_{\text{snor2 mot A}} = \frac{F m_a}{(m_A + m_B + m_C)} + \frac{F(m_b + m_c)}{(m_A + m_B + m_C)} = F \quad (3.6)$$

Vi ser at vi da får, ikke uventet, samme resultat som i (3.1). Snordraget blir altså mindre jo lenger bakover i kjeden man kommer.

Siden vi er så godt i gang, kunne vi jo more oss med å se på hva som ville skjedd dersom snoren som forbinder C og B hadde masse. La oss hente frem et frilegemediagram – Figur 3.8 og bruke Newtons andre lov nok en gang.



**Figur 3.8** Frilegemediagram for C og snor1

$$S_{\text{B mot snor1}} = (m_C + m_{\text{snor1}})a \quad (3.7)$$

$$S_{\text{C mot snor1}} = m_C a \quad (3.8)$$

Vi deler så de to ligningene (3.7) og (3.8) på hverandre:

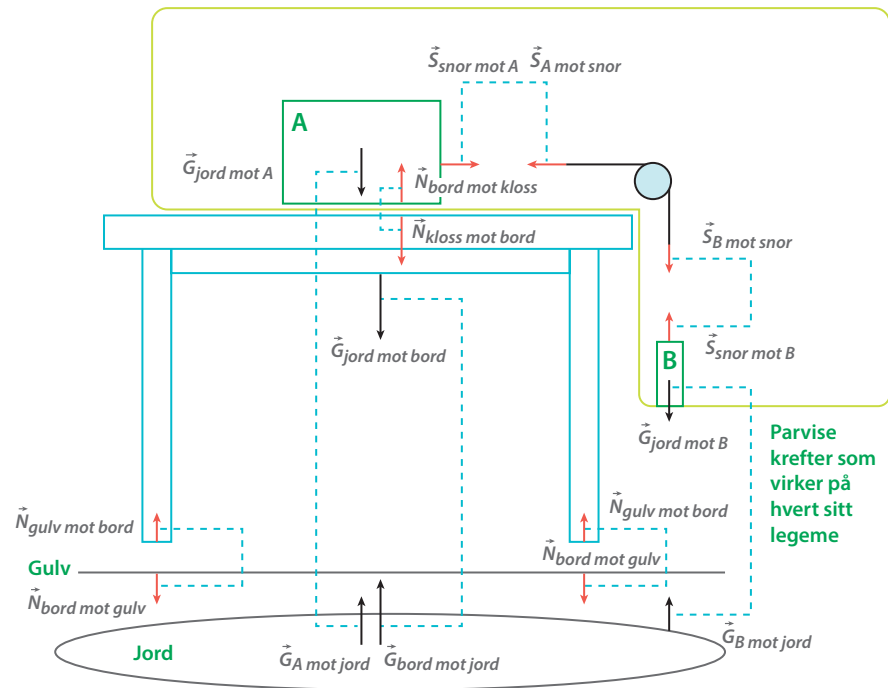
$$\frac{S_{\text{B mot snor1}}}{S_{\text{C mot snor1}}} = \frac{(m_C + m_{\text{snor1}})a}{m_C a} = 1 + \frac{m_{\text{snor1}}}{m_C} \quad (3.9)$$

Vi ser da at snordraget i høyre enden av snoren ville blitt større enn i venstre enden (3.9). Når snorens masse  $m_{\text{snor1}}$  går mot null, vil snordraget bli likt i begge ender.

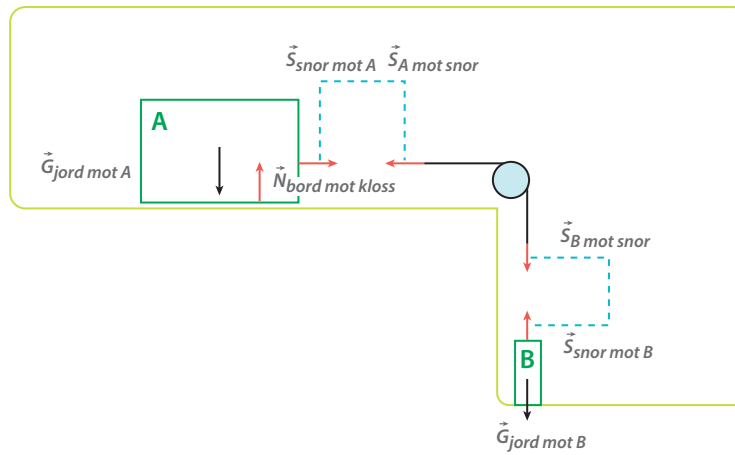
Hva så med systemet vi så på i innledende øvelse? Kunne vi brukte samme tilnærming til det problemet også? La oss hente frem **Figur 2.6** og dele inn i system av interesse og omgivelser som vist i Figur 3.9.

For å forenkle bildet «fjerner» vi omgivelsene. Se Figur 3.10.

Systemets masse er  $m_A + m_B$  (trinsen var jo masseløs). Det virker tre ytre krefter på systemet  $\vec{G}_{\text{jord mot A}}$ ,  $\vec{N}_{\text{bord mot kloss}}$  og  $\vec{G}_{\text{jord mot B}}$ . De to første ytre kreftene er like store og motsatt rettet. Systemet akselereres kun av tyngdekraften som virker på loddet B.



Figur 3.9 System og omgivelser



Figur 3.10 System

$$(m_A + m_B)a = G_{jord \text{ mot } B} \quad (3.10)$$

$$(m_A + m_B)a = m_B g \quad (3.11)$$

$$a = \frac{m_B}{(m_A + m_B)} g \quad (3.12)$$

Snordraget finner vi enklest ved å se på klossen A.

$$S = m_A a = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)} g \quad (3.13)$$

Som en ser, så finnes det flere veier til Rom.

# 4

## Kapittel 4

---

# Historisk sett

«Hvis jeg har sett lenger,  
så er det ved å stå på skuldrene til kjemper.»

*Brev til Robert Hooke, Isaac Newton (1642–1727)*

---

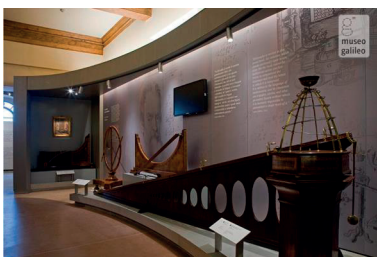
**LÆRINGSUTBYTTE:** Galileos skråplan, kinematikk, dynamikk,  
Atwoods fallmaskin

---

Det er nærmest en naturlov. Når jeg skal besøke noe, så er det enten stengt eller dekket med plast. Lett betuttet i den trykkende heten står jeg og ser på de lukkede dørene til Uffizi galleriet i Firenze. Hva nå? Det trengs kjøling og opplevelser. Jeg bestemmer meg for å ta en tur til Galileo Galilei museet rett ned i gaten. Der er det svalt. Det første som møter meg, er Galileos finger. At han viste fingeren til øvrigheten med sine vitenskapelige eksperimenter og observasjoner visste jeg, men at de hadde tatt vare på den var jeg ikke klar over. I tillegg til å lage teleskop, oppdage Jupiters måner og dermed sementere det heliosentriske verdensbildet, lagde han mange instrumenter for finne tyngdens konstante akselerasjon. Galileo var grunnleggeren av den eksperimentelle fysikken og utførte en rekke forsøk under kontrollerte betingelser. Med skråbrett klarte han å oppdage sammenhengen mellom akselerasjon, hastighet og posisjon. Indirekte fant han Newtons første og andre lov før Newton var født.

Galileo beskrev sine forsøk i boken *Dialog over de to store verdenssystemer*. Der fremstilles kirken som den lett stupide Simplicio, mens Galileo inntar rollen som den belærende Salviati. Ikke rart at pave Urban ble sur på Galileo. Skråplanet kommer fort på banen, og Salviati forklarer på lett snirklet vis Simplicio kinematikk. Kinematikk er den delen av mekanikken som handler om legemers bevegelse uten å ta hensyn til krefter eller masser.

Jeg ser inn i Sal 7. Der finner jeg det jeg har jaktet på, nemlig Galileos skråplan (Figur 4.1).



Figur 4.1 Galileos skråplan

La oss bli med på galeien med Galileo og kaste oss ut på skråplanet. Å bruke skråplan er lurt, for da kan vi regulere den konstante akselerasjonen til en brøkdel av tyngdens akselerasjon slik at det blir mulig å måle sammenhengen mellom akselerasjon, hastighet og tilbakelagt avstand så nøye en vil. Galileo brukte en kule med liten friksjon og plasserte bjeller nedover langs skråplanet, slik at tiden mellom hvert bjelleklikk på grunn av den fallende kulen var jevn. Eksperimentelt fant Galileo ut at for rettlinjert bevegelse med konstant akselerasjon er:

$$v = at \quad (4.1)$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad (4.2)$$

Hvor  $v$  er fart (hastighetens verdi uten å ta hensyn til hastighetens retning),  $a$  akselerasjon,  $t$  tid og  $s$  tilbakelagt strekning. Her er det forutsatt at en ikke har noen startfart  $v_0 = 0$ , og at  $s = 0$  ved start. Under denne forutsetningen kan vi løse de to ligningene slik at vi blir «kvitt» tiden og får en nyttig formel for sammenhengen mellom fart, akselerasjon og strekning:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 \quad (4.3)$$

$$v = \sqrt{2as} \quad (4.4)$$

Galileo resonnerte seg også frem til Newtons første lov ved å tenke seg at en glatt kule med en gitt fart ikke ville stoppe, men ha sin opprinnelige fart dersom man hadde en uendelig lang friksjonsløs bane. Newtons andre lov ser vi indirekte i skråplanforsøket, da varierende komponenter av tyngdekraften langs skråplanet gir varierende akselerasjon.

Formlene for rettlinjet bevegelse med konstant akselerasjon som Galileo fant, er det også mulig å komme frem til analytisk. Akselerasjon er definert som hastighetsforandring per tid. Dersom en ser på rettlinjet bevegelse, får en ved å integrere:

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{konstant} \quad (4.5)$$

$$adt = dv \quad (4.6)$$

$$\int_0^t adt = \int_{v_0}^v dv \quad (4.7)$$

$$at + v_0 = v \quad (4.8)$$

$$v = v_0 + at \quad (4.9)$$

Her er  $v_0$  fart i startøyeblikket. Det leddet var ikke med hos Galileo (4.1), da hans kuler startet med fart lik 0.

Så var det strekning. Fart er forandring av posisjon delt på tid.

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (4.10)$$

$$vdt = ds \quad (4.11)$$

$$\int_0^t vdt = \int_{s_0}^s ds \quad (4.12)$$

$$\int_0^t (v_0 + at)dt = \int_{s_0}^s ds \quad (4.13)$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (4.14)$$

Også her er det en liten forskjell fra Galileos formel (4.2), siden det her er tatt hensyn til at det er mulig å ha en startfart  $v_0$  og startposisjon  $s_0$ . Dersom du ønsker, kan du dykke dypere ned i kinematikken ved å lese kapittelet «**Alt er i endring**» i appendiks.

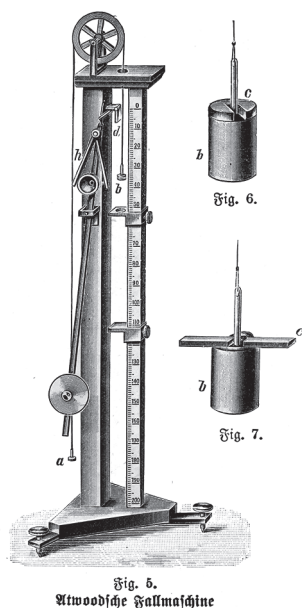


Fig. 6.  
Atwoodske Fallmaskine

**Figur 4.2** Atwoods originale fallmaskin

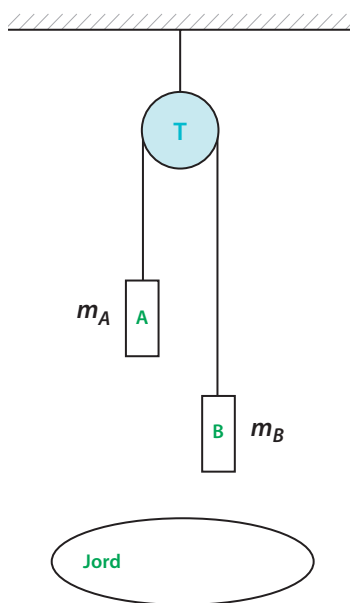
Du kan kanskje innvende at denne historiske avsporingen inneholdt lite snordrag. Trøsten får være at vi har fått med oss kinematikkens fødsel. Kinematikk opptar tradisjonelt de innledende deler i enhver fysikkbok, men burde nok vært presentert etter krefter og akselerasjon. Når oppgaver skal løses, skjer det i følgende rekkefølge:

Individuelle krefter  $\Rightarrow$  resultantkraft  $\Rightarrow$  akselerasjon  $\Rightarrow$  kinematikk

Dynamikk som er læren om krefter som endrer et legemes bevegelse, er viktigere enn kinematikk.

Er det mulig å forbedre Galileo Galilei sitt skråplan sånn at det blir enklere å etterprøve Newtons lover eksperimentelt? Det må nok den engelske matematikeren George Atwood ha tenkt da han konstruerte sin fallmaskin. Maskinen ble presentert i *Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies* i 1784 og har siden vært fast inventar i klasserom hvor mekanikk har vært pensum.

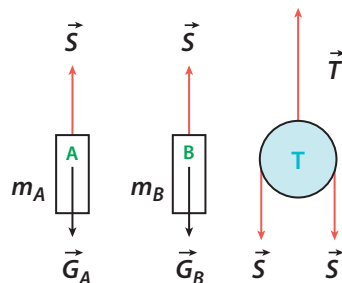
Figur 4.2 viser Atwoods originale fallmaskin, men la oss av pedagogiske grunner se på den enklere varianten som er tegnet i Figur 4.3.



**Figur 4.3** Forenklet Atwoods fallmaskin hvor trinsen henger i taket

Loddene A og B har tilnærmet samme vekt og har innebygget noen små lodd som kan flyttes fra side til side. På den måten kan en enkelt forandre akselerasjonen mens totalmassen og dermed tregheten er den samme. Trinsen og snoren anses som masseløse.

La oss prøve å finne loddenes akselerasjon og snordrag for vår Atwood-maskin og kraften som virker på taket. Da er det lurt å starte med å tegne frilegemediagrammer for de to loddene og trinsen. I ren latskap har vi latt være å tegne en figur med alle kreftene som virker, men konsentrert oss om dem vi skal beregne. Frilegemediagrammene er gjengitt i Figur 4.4.



**Figur 4.4** Frilegemediagrammer for loddene og trinsen

Med utgangspunkt i frilegemediagrammene kan vi sette opp ligninger ved hjelp av Newtons andre lov:



$$G_A - S = m_A a \quad (4.15)$$

$$S - G_B = m_B a \quad (4.16)$$

Her har vi antatt akselerasjonen  $a$  positiv i samme retning som  $G_A$  i (4.15) og dermed blir  $a$  positiv oppover i (4.16). Da har vi to ligninger med to ukjente, nemlig akselerasjonen  $a$  og snordraget  $S$ . Vi antar  $m_A > m_B$  slik at kloss A får positiv akselerasjon nedover. Legger vi sammen de to ligningene «forsvinner» snordraget og vi sitter igjen med:

$$G_A - G_B = m_A a + m_B a \quad (4.17)$$

$$m_A g - m_B g = m_A a + m_B a \quad (4.18)$$

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} g \quad (4.19)$$

Det var akselerasjonen. Snordraget finnes da ved å sette inn uttrykket for  $a$  i enten (4.15) eller (4.16). La oss velge (4.16):

$$S = m_B a + m_B g \quad (4.20)$$

$$S = m_B \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} g + m_B g = \frac{m_A m_B - m_B^2 + m_A m_B + m_B^2}{m_A + m_B} g = \frac{2m_A m_B}{m_A + m_B} g \quad (4.21)$$

Kraften som virker på taket er motsatt rettet av  $\vec{T}$ , men hvor stor er  $\vec{T}$ ? Den må være det doble av snordraget  $\vec{S}$ .

Er svarene vi har funnet rimelige? La oss gå til ytterpunktene. Når  $m_A = m_B$  vil akselerasjonen være null (4.19) og snordraget lik  $m_A g = m_B g$  som forventet. Når  $m_A \gg m_B$  vil akselerasjonen bli lik  $g$  og snordraget lik null.

$$a = \frac{1 - \frac{m_B}{m_A}}{1 + \frac{m_B}{m_A}} g \approx g \quad (4.22)$$

$$S = \frac{2\frac{m_B}{m_A}}{1 + \frac{m_B}{m_A}} g = 0 \quad (4.23)$$

Alt ser ut til å være i den skjønneste orden.

I Figur 4.2 ser du at Atwood-maskinen har en målestokk langs vertikalen. Ved å måle tid og tilbakelagt strekning for en gitt loddkonfigurasjon kan vi finne akselerasjonen. Vi vil da observere at den er i tråd med (4.2) og dermed konstant. Når vi vet  $a$  kan vi finne  $g$  med (4.19). Ved å flytte litt vekt fra det ene loddet til det andre kan vi observere at ulik kraft (tyngdepåvirkning) gir ulik akselerasjon med samme treghet.

Atwoods maskin kan altså brukes til eksperimentelt å etterprøve tyngdens akselerasjon og Newtons andre lov. Når loddene har samme masse, vil maskinen enten være i ro eller gå med jevn fart, og det er en konsekvens av Newtons første lov.

Hva så med Isaac Newton selv? Gjorde han noen eksperimenter for å etterprøve sine lover? Hadde han laboratorium? I hans banebrytende verk *Principia* fra 1687 er det få referanser til eksperimenter gjort i laboratorium, og de tre lovene blir tatt for gitt. Newton brukte derimot solsystemet som sitt laboratorium. Der beveger planetene seg i friksjonsløse baner rundt solen, og Newton brukte sine tre lover sammen med Keplers lover til å komme frem til gravitasjonsloven. Hvordan han gjorde det, kan du lese i kapitlet «**Et graverende eksempel**». Dermed hadde han vist at de tre lovene ikke bare gjaldt på jorden, men hadde universell gyldighet. Newton utførte verdens største eksperiment [6].

# 5

## Kapittel 5

---

# På glattisen

«Skating Away on the Thin Ice of a New Day.»

*Warchild, Jethro Tull*

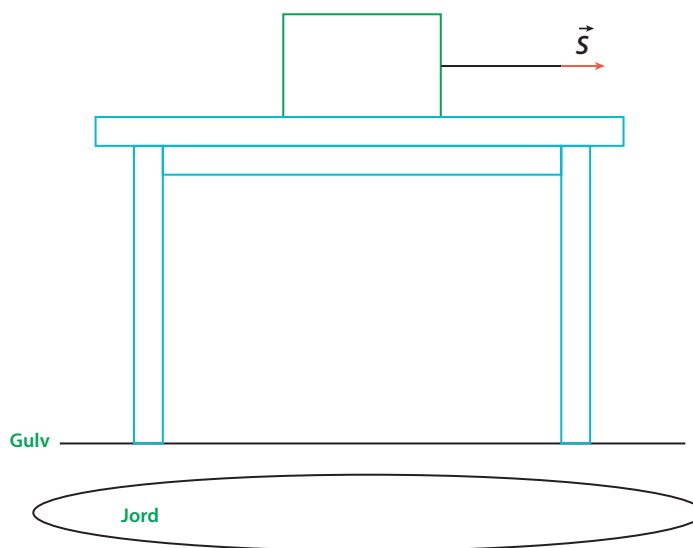
---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Friksjon, statisk friksjon, glidende friksjon, rulle­motstand, snordragsoppgaver med friksjon

---

Noen dager brenner seg fast i minnet for alltid. 12 mai 2000 var en slik dag. Lett sliten og uopplagt etter enda en dag på kontoret, var jeg innom det lokale kjøpesenteret for å kjøpe fiskepinner til familiens middag. Etter at pinner og diverse annet var trygt anbrakt i dertil egnede plastposer, siktet jeg mot nærmeste utgang. Idet jeg passerte sportsbutikken, ble jeg angrepet av en selger som mente at jeg burde fylle livet med innhold. Han holdt frem et par rulleskøyter. «Prøv disse. Du vil ikke angre et sekund». Jeg tenkte i mitt stille sin å føyse ham av med å si at rulleskøyter var leketøy for barn. Isteden hørte jeg meg selv si: «Størrelse 43». Jeg plantet føttene godt ned i rulleskøytene og strammet til. Jeg tok noen tak innover i kjøpesenteret. Med euforisk glede så jeg at kjøpesenteret ble en lokal variant av Vikingskipet og jeg Johan Olav Koss. Friksjon mellom hjul og underlag sparket meg fremover, mens den nesten fraværende rullemotstanden gjorde at jeg føk av gårde. I løpet av 10 000 meter lærte jeg mer om Newtons lover enn gjennom 20 år med skolegang.

Mange fysikkoppgaver starter med å se bort fra friksjonen. Nå skal vi bruke et helt kapittel på den. La oss begynne som så ofte før med å dra en kloss bortover et bord som vist i Figur 5.1.



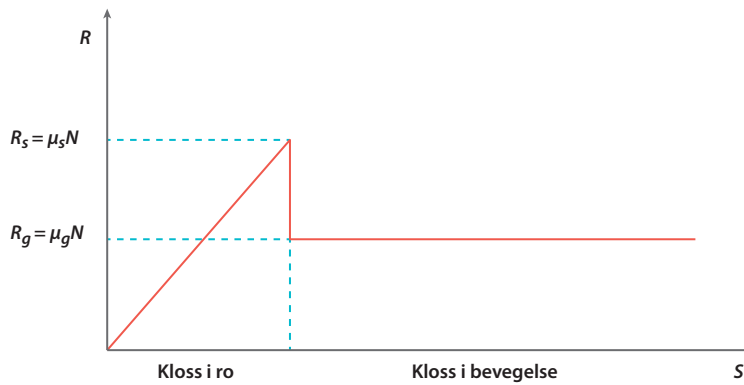
**Figur 5.1** Kloss som dras bortover et bord

Mellom bordet og klossen er det friksjon. Friksjonen er den motstand som bremses to legemer fra å gli fra eller mot hverandre. Friksjon er en kraft som virker i motsatt retning av bevegelsen når en gjenstand beveger seg. Årsaken til friksjon er sterke krefter mellom molekylene i de to legemene hvor de berører hverandre.

Når vi prøver å dra klossen, må det en viss kraft til for å få satt i gang bevegelse. Friksjon av denne typen kalles statisk friksjon. Drar vi hardt nok, vil klossen begynne å bevege seg, og vi vil oppleve glidende friksjon. Den glidende friksjonen er alltid

mindre enn den maksimalt statiske. Den glidende friksjonen  $R$  er proporsjonal med normalkraften  $N$  som virker på klossen,  $R = \mu_g N$  og  $\mu_g$  kalles den glidende friksjonskoeffisienten. Forresten kaller noen den for friksjonstallet, men det er samme sak.

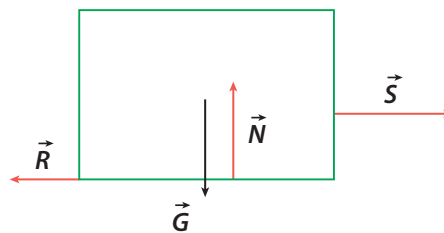
I Figur 5.2 ser du hva som skjer dersom vi øker snordraget  $S$  fra null og til klossen begynner å bevege seg. Så lenge klossen er i ro, vil den statiske friksjonen  $R$  være lik snordraget inntil en når en maksimal verdi  $R_s = \mu_s N$  og klossen vil begynne å bevege seg.  $R_s$  er proporsjonal med normalkraften.



**Figur 5.2** Friksjon  $R$  som funksjon av tid hvor en øker snordraget til klossen starter å bevege seg

Vel, hva med rullemotstanden jeg opplevde på rulleskøytene? Det er egentlig ikke friksjon i ordets rette betydning, men kortvarige elastiske deformasjoner i kontaktpunktet mellom hjul og underlag. Rullemotstanden er i størrelse lik den statiske friksjonen og er god å ha når en skal starte opp et kjøretøy. Når kjøretøyet ruller med konstant fart på horisontalt underlag, er det tilnærmet ingen friksjon. Når en bremses, vil friksjonen være lik den statiske så lenge hjulene ruller, siden kontaktpunktet med underlaget er i ro. Skulle de låse seg, får en vesentlig mindre glidende friksjon som gjør at en mister styringen og øker bremselengden betraktelig.

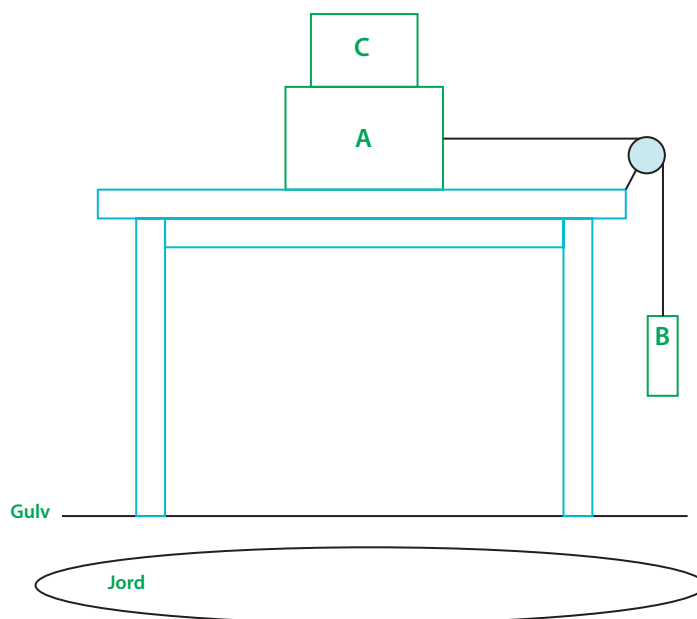
Det får være nok basalkunnskaper om friksjon. La oss gå tilbake til klossen og tegne et frilegemediagram.



**Figur 5.3** Frilegemediagram for en kloss som dras bortover et bord med friksjon mellom bord og kloss

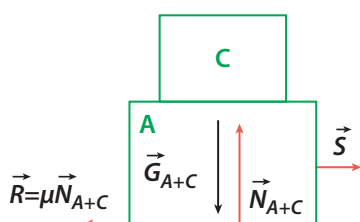
Klossen vil ikke bevege seg vertikalt fordi  $\vec{G}$  og  $\vec{N}$  er like store og motsatt rettet. Når  $\vec{S}$  blir større enn  $\vec{R}$ , vil klossen bevege seg med akselerasjon mot høyre. Opphører  $\vec{S}$ , vil klossen stoppe på grunn av friksjonen. Det faktum at vi lever i en verden med friksjon, gjør at vi, som Aristoteles, har lett for å komme til den feilaktige konklusjon at kraft må være proporsjonal med hastigheten;  $\vec{F} \propto \vec{v}$ . Fjorten dager i vektløs tilstand i verdensrommet hadde nok fått oss på andre tanker.

Nå er det på tide med en oppgave. Figur 5.4 viser et arrangement hvor to klosser blir dratt av et lodd.



**Figur 5.4** Klossene A og C dras av et lodd B

Massene av A og B er henholdsvis 10 kg og 5 kg. I dette tilfellet er den glidende og statiske friksjonen mellom kloss A og bord lik  $\mu = 0,20$ . En ofte brukt antagelse er at  $\mu_s \cong \mu_g$ . Som vanlig, er trinse og snor masseløse.



**Figur 5.5** Frilegemediagram for klossene A og C

- Finne minimum masse av C som vil hindre A fra å bevege seg
- Beregne akselerasjon dersom C løftes bort

La oss starte med å tegne et frilegemediagram, Figur 5.5, for massene A og C. For å komme videre kan vi dra veksler på gammel kunnskap. I kapittelet «Innledende øvelse» fant vi at snordraget måtte være lik loddets tyngde når systemet var i ro (2.10). Vi kan derfor skrive opp følgende ligning:

$$S = G_B \quad (5.1)$$

Friksjonen  $|\vec{R}|$  må være lik  $|\vec{S}|$  for at klossene skal være i ro:

$$S = R = \mu N = \mu(m_A + m_C)g \quad (5.2)$$

Da kan vi finne massen til C:

$$\mu(m_A + m_C)g = G_B = m_B g \quad (5.3)$$

$$m_C = \frac{m_B}{\mu} - m_A = \frac{5}{0,2} \text{ kg} - 10 \text{ kg} = 15 \text{ kg} \quad (5.4)$$

Dermed var oppgave a) utført, og det er bare å fortsette ufortrødent med oppgave b). Når det gjelder b) kan det være lurt å se litt tilbake på det vi gjorde i kapittelet «**Innledende øvelse**». Der fant vi også akselerasjonen, men uten friksjon. Da kan vi enten slå opp i det kapittelet og legge til friksjon, eller bare kopiere teksten derfra og så legge til friksjon i ligningene. Av ren dovenskap så velger jeg det siste.

For klossen vil resultantkraften være lik  $\vec{S} - \vec{R}$ . Siden vi i oppgaven driver med rettlinjett bevegelse enten langs bordet eller loddrett nedover, kan vi droppe vektorsymbolene og skrive Newtons andre lov anvendt på klossen:

$$S - R = m_A a \quad (5.5)$$

For å finne akselerasjonen må ligningen løses med hensyn på akselerasjonen:

$$a = \frac{(S - R)}{m_A} \quad (5.6)$$

Utfordringen her er at vi ikke kjenner snordragets størrelse. For å komme videre kan vi utnytte det faktum at kloss og lodd har samme akselerasjon. Summen av krefter som virker på loddet, er  $G_B - S$  som vist i frilegemediagrammet, Figur 5.6.

Newtons andre lov benyttet på loddet gir oss:

$$a = \frac{G_B - S}{m_B} \quad (5.7)$$

Vi har nå to ligninger (5.5) og (5.7) med to ukjente  $a$  og  $S$ . Ved å løse ligningssettet med hensyn på  $a$  får vi:

$$a = \frac{G_B - (m_A a + R)}{m_B} \quad (5.8)$$

$$m_A a + m_B a = G_B - R \quad (5.9)$$

$$a = \frac{G_B - R}{m_A + m_B} = \frac{g(m_B - \mu m_A)}{m_A + m_B} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 (5 \text{ kg} - 0,20 \cdot 10 \text{ kg})}{15 \text{ kg}} = 1,96 \text{ m/s}^2 \quad (5.10)$$



**Figur 5.6** Frilegemediagram for loddet B

Akselerasjonen blir altså  $1,96 \text{ m/s}^2$ . Uten friksjon hadde den blitt  $3,27 \text{ m/s}^2$ .

Vi blir ikke bedt om det, men det kunne vært interessant å regne ut snordraget også når vi første var i gang. La oss trekke veksler på (5.5).

$$S = m_A a + R \quad (5.11)$$

$$S = m_A \frac{g(m_B - \mu m_A)}{m_A + m_B} + R \quad (5.12)$$

Ved å sette inn  $R = \mu m_A g$  får vi

$$S = \frac{g m_A m_B (1 + \mu)}{m_A + m_B} \quad (5.13)$$

$$S = \frac{g m_A m_B (1 + \mu)}{m_A + m_B} \quad (5.14)$$

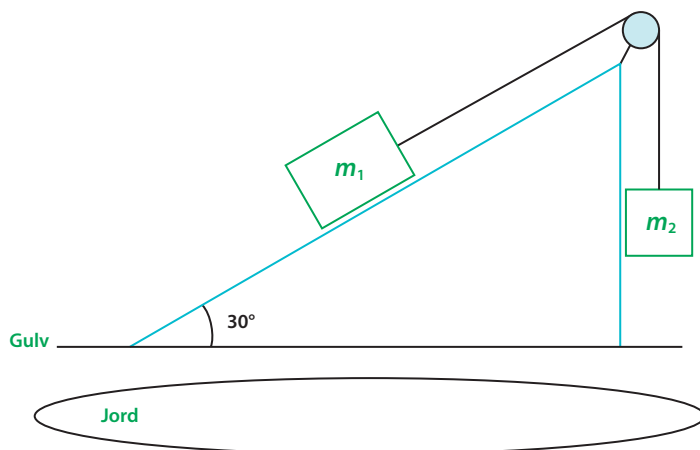
$$S = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 5 \text{ kg} \cdot (1 + 0,2)}{15 \text{ kg}} = 39,2 \text{ N} \quad (5.15)$$

Det er ingenting i veien for at vi heller hadde brukt (5.7).

$$a = \frac{G_B - S}{m_B} \quad (5.16)$$

$$S = 5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 - 5 \text{ kg} \cdot 1,96 \text{ m/s}^2 = 39,2 \text{ N} \quad (5.17)$$

Er svarene for  $a$  og  $S$  rimelige? Absolutt! Når  $R$  blir lik  $G_B$ , blir akselerasjonen lik null som forventet (5.10). Når  $R = 0$  blir  $a$ , sammenlign (5.10) med (2.6), og  $S$ , sammenlign (5.14) med (2.8), lik det de ville ha vært uten friksjon.



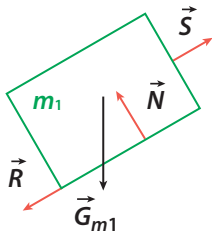
Figur 5.7 Snordrag på skråplan

Har du lyst på en oppgave til helt på tampen? La oss gjøre som Galileo Galilei og bevege oss ut på skråplanet med hjelp av to klosser – Figur 5.7.  $m_1 = 200 \text{ g}$ ,  $m_2 = 180 \text{ g}$  og  $\mu = 0,1$ . Snor og trinse er masseløse.

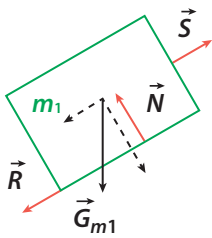
- Beregn akselerasjon
- Finn snordraget

Igjen er det naturlig å starte med å tegne frilegemediagrammer. Først ut denne gang er diagrammet for klossen med masse  $m_1$ .

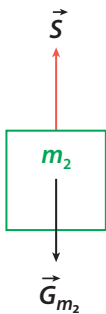




**Figur 5.8** Frilegemediagram for klossen med masse  $m_1$



**Figur 5.9** Frilegemediagram for klossen med masse  $m_1$  med dekomponering av tyngden  $\vec{G}_{m_1}$



**Figur 5.10** Frilegemediagram for klossen med masse  $m_2$

I frilegemediagrammet i Figur 5.8 er friksjon  $\vec{R}$  og snordrag  $\vec{S}$  som seg hør og bør tegnet mot og med bevegelsesretningen, normalen  $\vec{N}$  er normalt på skråplanet, og tyngden  $\vec{G}_{m_1}$  peker mot jordens sentrum. I dette tilfellet er klossens bevegelsesretning mot høyre fordi  $\vec{G}_{m_1} < \vec{G}_{m_2}$ . For å finne normalen  $\vec{N}$  må vi dekomponere tyngden  $\vec{G}_{m_1}$  i retningen normalt på skråplanet. Dersom du ikke har vært med på dekomponering av vektorer tidligere, kan du lese mer om det i kapittelet «Amors piler» i appendiks. Siden vi er på et skråplan, vil også tyngdens komponent langs skråplanet virke mot bevegelsen. I Figur 5.9 er frilegemediagrammet tegnet på nytt med dekomponering av tyngden. Dekomponeringen er vist med stiplede piler.

Så er det frilegemediagrammet for massen  $m_2$  som skal tegnes. På den virker kun snordrag  $\vec{S}$  og tyngde  $\vec{G}_{m_2}$  som vist i Figur 5.10.

Med frilegemediagrammene på plass er det bare å ta i bruk Newtons andre lov for å sette opp ligninger. La oss begynne med klossen med masse  $m_1$  på skråplanet.

For klossen med masse  $m_1$  vil resultantkraften langs skråplanet være lik  $\vec{S} - \vec{R} - \vec{G}_{m_1 \text{ langs skråplan}}$ . Siden vi i oppgaven driver med rettlinjett bevegelse enten langs skråplanet eller loddrett nedover, kan vi droppe vektorsymbolene og skrive:

$$S - R - G_{m_1} \sin(30^\circ) = m_1 a \quad (5.18)$$

Vinkelen er angitt i grader. For å finne akselerasjonen må ligningen løses med hensyn på akselerasjonen:

$$a = \frac{(S - R - G_{m_1} \sin(30^\circ))}{m_1} \quad (5.19)$$

Utfordringen her er at vi ikke kjenner snordragets størrelse. For å komme videre kan vi utnytte det faktum at klossene har samme akselerasjon. Summen av krefter som virker på klossen med masse  $m_2$  er  $G_{m_2} - S$ . Newtons andre lov benyttet på loddet gir oss:

$$a = \frac{G_{m_2} - S}{m_2} \quad (5.20)$$

Vi har nå to ligninger (5.18) og (5.20) med to ukjente  $a$  og  $S$ . Ved å løse ligningssettet med hensyn på  $a$  får vi:

$$a = \frac{G_{m_2} - (m_1 a + R + G_{m_1} \sin(30^\circ))}{m_2} \quad (5.21)$$

$$m_1 a + m_2 a = G_{m_2} - R - G_{m_1} \sin(30^\circ) \quad (5.20)$$

Normalen  $N = G_{m_1} \cos(30^\circ)$  og dermed blir  $R = \mu N = \mu G_{m_1} \cos(30^\circ)$ .

$$a = \frac{G_B - R - G_{m_1} \sin(30^\circ)}{m_1 + m_2} = \frac{g(m_2 - \mu m_1 \cos(30^\circ) - m_1 \sin(30^\circ))}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{9,81(0,18 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,87 - 0,2 \cdot 0,5)}{0,38} \text{ m/s}^2 = 1,62 \text{ m/s}^2 \quad (5.23)$$

Akselerasjonen blir altså  $1,62 \text{ m/s}^2$ . Uten friksjon hadde den blitt  $2,07 \text{ m/s}^2$ .

Hva med snordraget? Det finnes ved å bruke (5.20).

$$a = \frac{G_{m_2} - S}{m_2} \quad (5.24)$$

$$S = (0,2 \cdot 9,81 - 0,2 \cdot 2,05) N = 1,6 N \quad (5.25)$$

Da var vi ferdige, men igjen vekkes nysgjerrigheten. Hva må massen av  $m_1$  være for at den skulle kunne løfte  $m_2$ ? Grensebetingelsen vil være at akselerasjonen blir null. En kan ta utgangspunkt i (5.15).

$$S - R - G_{m_1} \sin(30^\circ) = m_1 a = 0 \quad (5.26)$$

$$S - \mu m_1 g - \frac{m_1 g}{2} = 0 \quad (5.27)$$

En kan finne S, fordi den må være lik tyngden av  $m_2$  når akselerasjonen er null.

$$m_2 g - \mu m_1 g - \frac{m_1 g}{2} = 0 \quad (5.28)$$

$$m_1 = \frac{2m_2}{(1 + 2\mu)} \quad (5.29)$$

Massen  $m_1$  må være i størrelsesorden den dobbelte av  $m_2$ . I det friksjonsfrie tilfellet må massen være akkurat dobbelt så stor, mens det med friksjon trengs litt mindre masse. For å få  $m_1$  til å skli nedover skråplanet vil en trenge litt mer enn dobbel masse, for da virker jo friksjonen i samme retning som snordraget:

$$m_1 = \frac{2m_2}{(1 - 2\mu)} \quad (5.30)$$

# 6

## Kapittel 6

---

# Stabilt som et korthus

«Gi meg et fast punkt, og jeg skal rokke jorden.»

*Synagoge, Arkimedes (287–212 fvt.)*

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Likevekt, stive legemer, statikk, sum av krefter, bruk av Newtons tredje lov, likevektbetingelser, rettlinjert bevegelse, rotasjon, kraftpar, kraftmoment

---

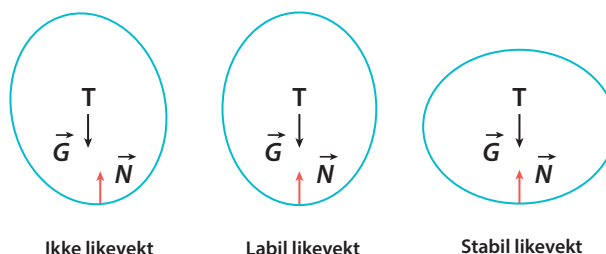


«Se, Pappa!» Jeg snur meg og ser et imponerende stort korthus. Min datter kan tydeligvis lovene om likevekt. Summen av alle krefter som virker er null, og det er ingen kraftmoment som får noe til å dreie. Hun har valgt de mest slitte kortene vi har og et bord med grov overflate for å få god friksjon. Hun endte senere opp som samfunnsøkonom, men kunne nok ha blitt en habil bygg-ingeniør også.

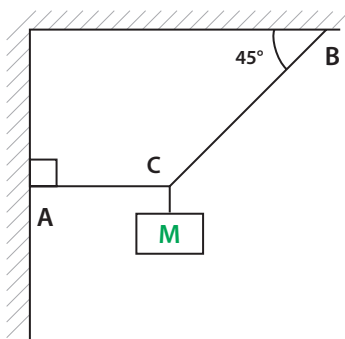
I Figur 6.1 ser vi korthuset og den stolte bygger sekunder før det hele raste sammen forårsaket av krefter, noen andre i familien, som skapte ubalanse.

Figur 6.1 Korthus

Ulike former for likevekt for et legeme er vist i Figur 6.2. T angir tyngdepunktet. Min datters korthus var av typen labil likevekt, da det skulle ingenting til for å få det til å rase sammen. Litt lim hist og her kunne nok gjort likevekten mer stabil. Min likevekt i sofaen var nok mer av den indifferente typen.



Figur 6.2 Ulike typer likevekt

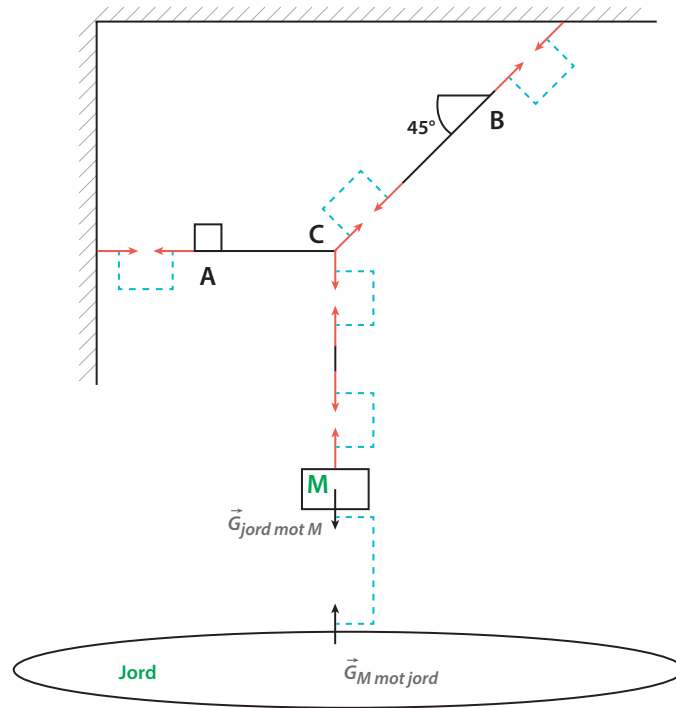


Figur 6.3 System i likevekt

Når krefter virker på et legeme, kan de deformere det. Den delen av fysikken, som kan være spennende nok, skal vi se bort ifra, og kun se på såkalte stive legemer som ikke deformeres. Det har vi gjort frem til nå, og det vil vi fortsette med. I dette kapittelet skal vi se på stive legemer som er i likevekt. Den grenen av mekanikken kalles statikk.

I Figur 6.3 ser vi et system i likevekt. Finn snordraget i AC og BC når M har en masse på 40 kg.

La oss starte litt omstendelig med å tegne inn alle kreftene som virker i vårt system. Igjen ser vi Newtons tredje lov utfolde seg i all sin prakt hvor kraftparene virker på hvert sitt legeme og er like store og motsatt rettede.



**Figur 6.4** Kraftene i vårt system

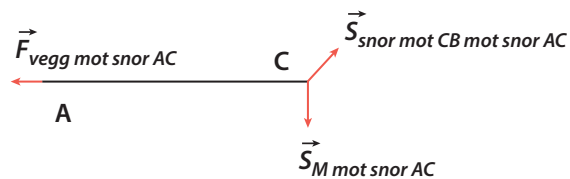
For at snoren AC og for den sak skyld hele systemet skal være i ro, må summen av alle krefter være lik null.

**Første likevektsbetingelse:**

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

(6.1) kalles første likevektsbetingelse av den enkle grunn at det dukker opp en til litt senere.

Vi må finne de tre kreftene som virker på snoren AC. I Figur 6.5 er det laget et frilegemediagram for snoren AC.



**Figur 6.5** Frilegemediagram for snoren AC

For å få likevekt må summen av kreftene være lik null.  $\vec{S}_{\text{snor } CB \text{ mot snor } AC} = \vec{F}_{\text{vegg mot snor } AC} + \vec{S}_{M \text{ mot snor } AC}$ .

For å komme videre må vi dekomponere kreftene langs den vertikale og den horisontale aksene.

Vertikalt:

$$S_{M \text{ mot snor } AC} = S_{\text{snor } CB \text{ mot snor } AC} \sin(45^\circ) \quad (6.2)$$

Horisontalt:

$$S_{\text{snor } CB \text{ mot snor } AC} \cos(45^\circ) = F_{\text{vegg mot snor } AC} \quad (6.3)$$

Da har Newtons tredje lov gitt oss to ligninger med to ukjente, nemlig  $S_{\text{snor } CB \text{ mot snor } AC}$  og  $F_{\text{vegg mot snor } AC}$ .

Det er naturlig å starte med snordraget massen gir i C og (6.2):

$$S_{\text{snor } CB \text{ mot snor } AC} = \frac{40g}{\sin(45^\circ)} \text{ N} = \frac{80g}{\sqrt{2}} \text{ N} = 554,9 \text{ N} \quad (6.4)$$

Hvor  $\sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$ . Med  $S_{\text{snor } CB \text{ mot snor } AC}$  innabords er det bare å bruke (6.3) til å finne  $F_{\text{vegg mot snor } AC}$ :

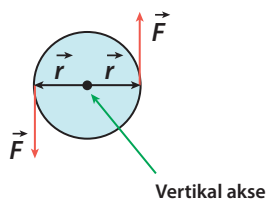
$$F_{\text{vegg mot snor } AC} = \frac{80g}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ N} = 40g \text{ N} = 392,4 \text{ N} \quad (6.5)$$

Da har vi funnet snordraget i snor AC:

$$AC = F_{\text{vegg mot snor } AC} = 392,4 \text{ N} \quad (6.6)$$

Snordraget BC:

$$BC = S_{\text{snor } CB \text{ mot snor } AC} = 554,9 \text{ N} \quad (6.7)$$



**Figur 6.6** Et legeme som utsettes for et kraftpar

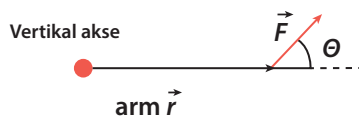
Første betingelse for likevekt for et legeme handler om å være i ro eller i retlinjet bevegelse. Den andre betingelsen har med rotasjon å gjøre. Dersom et legeme ikke roterer, er andre betingelse oppfylt. Hvordan kan en få et legeme til å rotere? Ved for eksempel å utsette det for et kraftpar  $\vec{F}$  og  $\vec{F}$  som vist i Figur 6.6. Kraftparets posisjonsvektor  $\vec{r}$  har origo i den vertikale aksene.

I Figur 6.6 ser vi at summen av kreftene er lik null. Dersom det er tyngdekraft med i spillet, vil normalkraften på den vertikale aksene vær lik og motsatt rettet

tyngdekraften. Første likevektsbetingelse er oppfylt, men kraftparet får legemet til å rotere. Jo større kraft som brukes, jo raskere vil rotasjonen bli. Det virker kraftmomenter (momenter) rundt aksen som får den til å rotere. Kraftmomentet  $\tau$  er lik:

$$\tau = rF \quad (6.8)$$

(6.8) er den velkjente kraft ganger arm som kan anvendes når  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$  står normalt på hverandre. Hvis ikke det er tilfelle, må en bruke kraften  $\vec{F}$  sin normalkomponent på armen  $\vec{r}$  eller  $\vec{F}$  sin normalkomponent på  $\vec{r}$ .



**Figur 6.7** Kraftmoment rundt en vertikal akse. Arm er avstanden fra aksen til kraftens retningslinje

Alle som har hatt gleden av å skifte til vinterdekk, vet at mutrene løsner lettere jo større kraftmoment en anvender. Større kraftmoment kan en få ved enten å anvende kraft normalt på hjulkrysset eller å gjøre armen  $r$  lengre med en lang stang og hoppe normalt på enden for å få så stort kraftmoment som mulig. At det ofte ender med knekt bolt, er en helt annen sak.

Figur 6.7 viser kraftmoment rundt en vertikal akse.

Den generelle formel for kraftmoment er:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.9)$$

Her er  $\vec{\tau}$  kryssproduktet av  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$ . Verdien av  $\vec{\tau}$  er:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin(\theta) \quad (6.10)$$

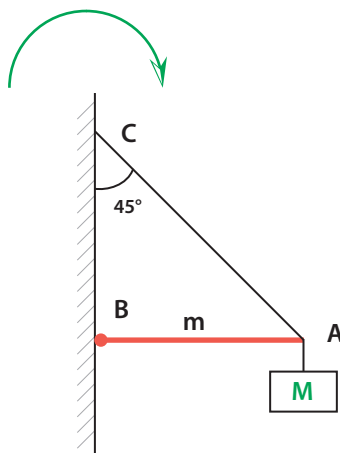
Her er  $\theta$  vinkelen mellom  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$ . Vektoren  $\vec{\tau}$  står normalt på planet utspent av  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$ .

#### Andre likevektsbetingelse:

$$\sum \vec{\tau} = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

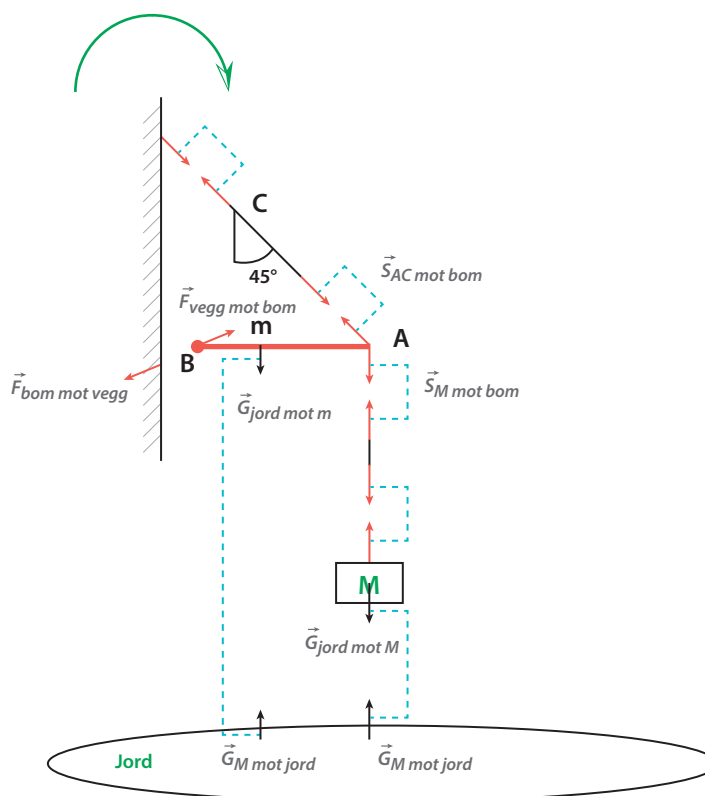
(6.11) må være tilfredsstilt rundt et hvilket som helst punkt i legemet.

La oss more oss med en liten oppgave hvor vi skal bruke likevektbetingelser for å finne snordraget. Det vi skal se på er gjengitt i Figur 6.8.



**Figur 6.8** Bom med masse  $m$  som holder et lodd med masse  $M$  i enden

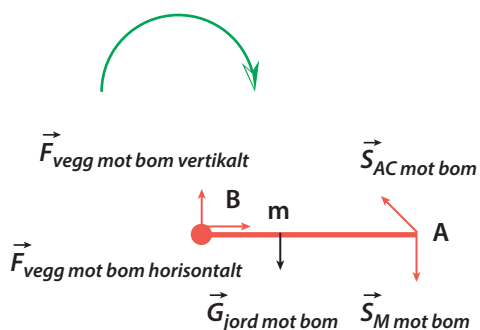
Bommen  $BA$  som kan rotere rundt  $B$ , har en masse  $m = 20$  kg og holder en kloss med masse  $M = 40$  kg i endepunktet  $A$ . Vi skal finne snordraget  $AC$  ved å bruke andre likevektsbetingelse om at summen av kraftmomenter rundt en vilkårlig akse for et system er lik null. Den grønne pilen øverst indikerer den valgte positive retning for kraftmoment. La oss begynne med å tegne inn alle kreftene som virker i vårt system.



**Figur 6.9** Alle krefter som virker

Igjen ser vi at summen av alle krefter, i Figur 6.9, er lik null på grunn av Newtons tredje lov. I tillegg ser du at kraftparene virker på ulike legemer som seg hør og bør.

Tilbake til bommen som skal hjelpe oss å finne snordraget. La oss tegne, Figur 6.10, et frilegemediagram for bommen.



**Figur 6.10** Bommens frilegemediagram med kraftmomentets positive retning inntegnet

Kreftene som virker i punkt B, bidrar ikke til noe moment da avstanden til akselen er lik null. Da momentet rundt B skal være lik null, ingen rotasjon, kan vi skrive:

$$0 = \frac{1}{2}lmg + lMg - lS_{AC \text{ mot bom}} \sin(45^\circ) \quad (6.12)$$

Første ledd i (6.12) er kraft ganger arm for bommens tyngdepunkt. Bommen er antatt å være homogen, og dermed er tyngdepunktet på midten. Neste ledd er kraft ganger arm for klossen med masse  $M$ , og siste ledd er kraft ganger arm på grunn av snordraget. Snur vi om på ligningen, får vi:



$$S_{AC \text{ mot bom}} = \frac{(m + 2M)g}{\sqrt{2}} \quad (6.13)$$

Hvor  $\sin(45) = \sqrt{2}/2$  og  $l$  er bommens lengde som behagelig forsvinner ut av regnestykket.  $S_{AC \text{ mot bom}}$  er snordraget vi er på jakt etter. Setter vi inn verdier, får vi:

$$S_{AC \text{ mot bom}} = \frac{(m + 2M)g}{\sqrt{2}} = 693,7 \text{ N} \quad (6.14)$$

Da bommen ikke roterer, kan vi bruke andre likevektbetingelse til å beregne kraftmoment rundt andre akser i legemet. La oss prøve i punkt A. Da kan vi se bort fra alle krefter som virker i A, og finner følgende basert på Figur 6.10.

$$0 = -\frac{1}{2}lmg + lF_{\text{vegg mot bom vertikal}} \quad (6.15)$$

$$F_{\text{vegg mot bom vertikal}} = \frac{1}{2}mg \quad (6.16)$$

At dette resultatet er rimelig, ser vi av (6.12) hvor snordragets vertikale komponent holder hele klossens tyngde, som er lik  $S_{M \text{ mot bom}}$ , samt halve bommens tyngde:

$$0 = \frac{1}{2}lmg + lMg - lS_{AC \text{ mot bom vertikal}} \quad (6.17)$$

$$S_{AC \text{ mot bom vertikal}} = \frac{1}{2}mg + Mg \quad (6.18)$$

Hvorfor kan vi se bort fra  $F_{\text{vegg mot bom horisontal}}$  når en beregner kraftmomentet rundt A? Jo, bommen er også horisontal, og da er deres kraftmoment null.

Hva med å beregne kraftmomentet rundt et punkt til? La oss ta bommens tyngdepunkt og igjen se på Figur 6.10.

$$0 = \frac{1}{2}lF_{\text{vegg mot bom vertikal}} + \frac{1}{2}lMg - \frac{1}{2}lS_{AC \text{ mot bom vertikal}} \quad (6.19)$$

Første ledd i (6.19) er kraft ganger arm for den vertikale kraften mot veggen. Neste ledd er kraft ganger arm for klossen med masse  $M$ , og siste ledd er kraft ganger arm på grunn av snordraget. Setter vi inn, får vi:

$$0 = \frac{1}{2}l\frac{1}{2}mg + \frac{1}{2}lMg - \frac{1}{2}l\left(\frac{1}{2}mg + Mg\right) = 0 \quad (6.20)$$

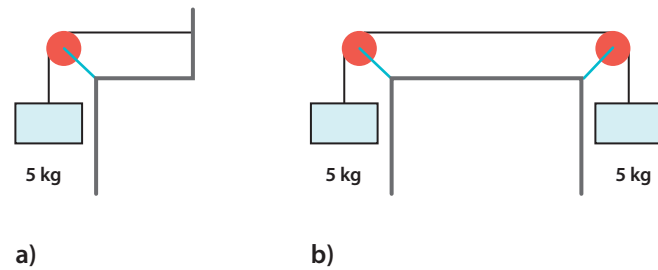
Nå har vi sett at bommen oppfyller andre likevektbetingelse til gangs.

Hva med den første likevektbetingelsen? Vel, kreftene i horisontal retning på bommen fra vegg og snordrag  $S_{AC \text{ mot bom horisontal}}$  er motsatt og like store. Kreftene i vertikal retning kan vi summere fra venstre mot høyre på bommen. Vi velger positiv retning oppover:

$$F_{\text{vegg mot bom vertikal}} - mg - Mg - S_{AC \text{ mot bom vertikal}} = \frac{1}{2}mg - mg - Mg + \frac{1}{2}mg + Mg = 0 \quad (6.21)$$

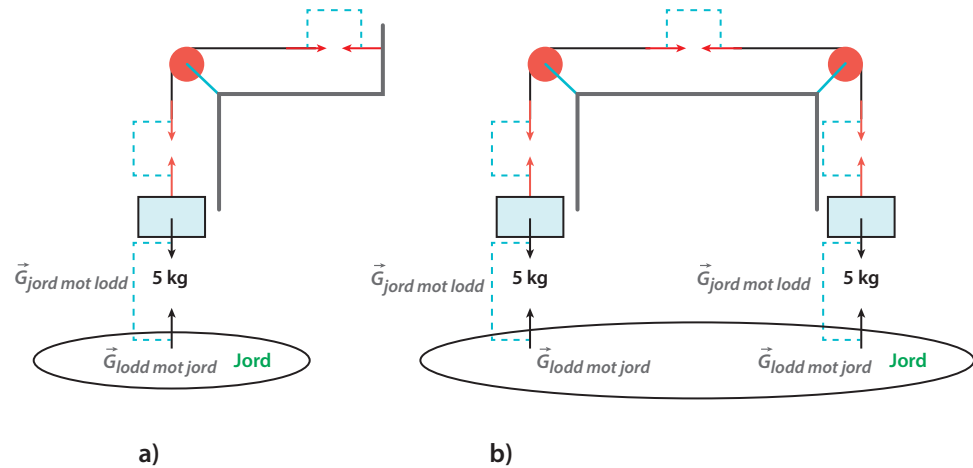
Vi kan ta det helt med ro. Ikke uventet så tilfredsstillter bommen begge likevektbetingelsene.

Har du lyst å komme litt i ubalanse her på tampen av kapittelet? Se på de to systemene i Figur 6.11. Hvor stort er snordraget i a) mot den grå veggen? Hva er snordraget midt på snoren i b)? Er snordragene like store eller størst i a) eller b)?



**Figur 6.11** Snordrag i likevekt

La oss tegne kreftene som virker i Figur 6.12.



**Figur 6.12** Kreftene som virker

Newtons tredje lov viser oss at snordragene i de to tilfellene er like store og lik  $\vec{G}_{\text{lodd mot jord}}$ .

## Kapittel 7

---

# Skyve eller dra – ett fett?

«Dra meg baklengs inn i verktøykassa!»

*Solan og Ludvig – Jul i Flåklypa, Reodor Felgen*

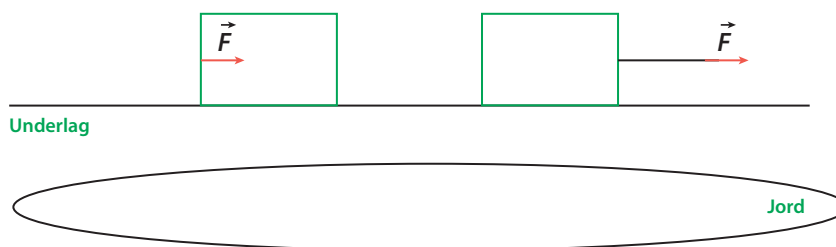
---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Skyv av legemer, sammenheng mellom skyv og drag, overføring av kraft via friksjon

---

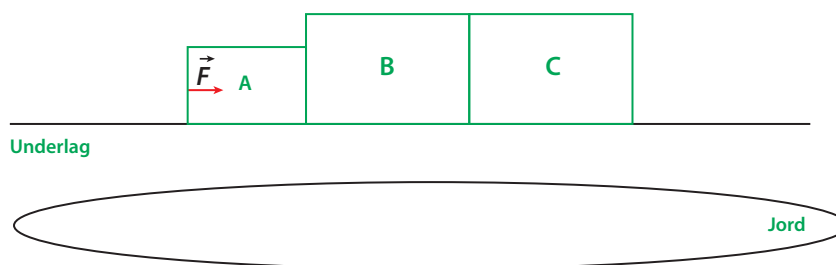
Min nevø er på julebesøk hos bestemor. Han har flydd inn sørfra. Bestemor spør ham: «Hva er det kjekkeste med å fly?» «Det er å fyke nedover rullebanen og bli presset med stor kraft mot setet.»

Er det forskjell mellom å skyve og å dra? I Figur 7.1 ser du to like klosser på et bord hvor den ene skyves og den andre dras med krefter av samme styrke. Vi ser at angrepspunktene for skyv- og dra-kreftene er ulike, men begge vil akselerere klossene like mye.



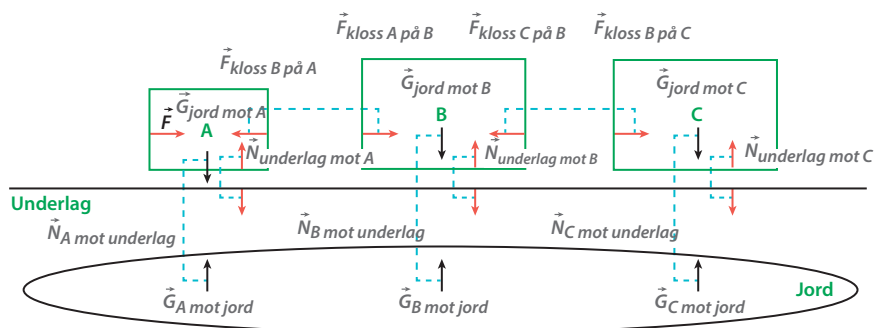
Figur 7.1 Skyve eller dra er ett fett

Oppgave: I Figur 7.2 ser du tre klosser A, B og C som skyves friksjonsløst mot høyre av en kraft  $\vec{F}$ . Hvor er skyvkraften størst, eller er den lik overalt?



Figur 7.2 Tre klosser som skyves med en kraft F

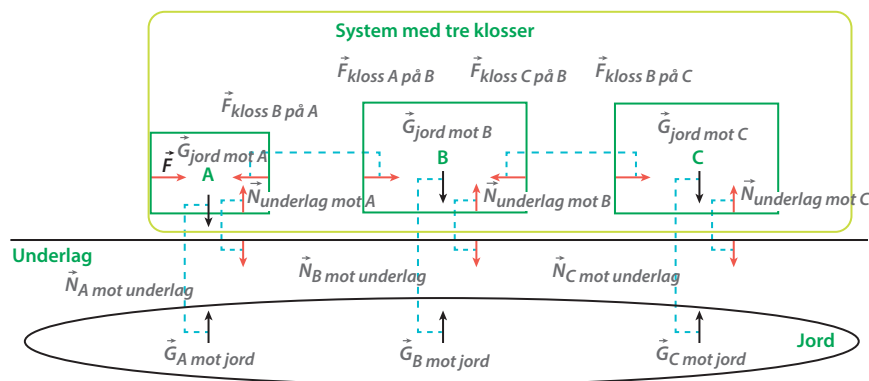
La oss starte med å tegne inn alle krefter som virker som kraftpar ved å bruke Newtons tredje lov.



Figur 7.3 Alle kreftene som virker

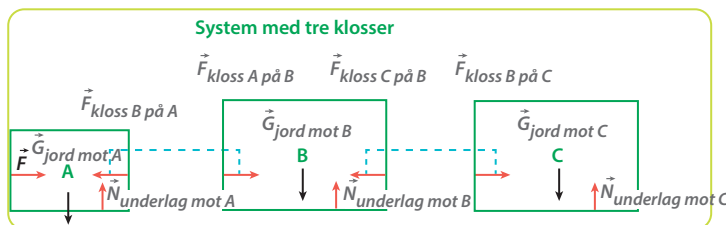
Vi ser at de parvise kreftene er like store, motsatt rettet og virker på hvert sitt legeme. Her er det kun én kraft  $\vec{F}$  som ikke kommer parvis, og det er den ytre kraften som virker på de tre klossene.

Siden de tre klossene skyves sammen, må de ha samme akselerasjon mot høyre. La oss derfor starte med å se på klossene A, B og C som et system, Figur 7.4, og la resten være omgivelser.



Figur 7.4 A, B og C som et system

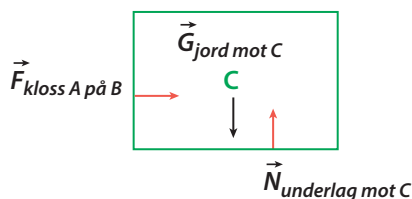
Det neste vi må gjøre er å lage et frilegemediagram for vårt system med tre klosser, og det er vist i Figur 7.5.



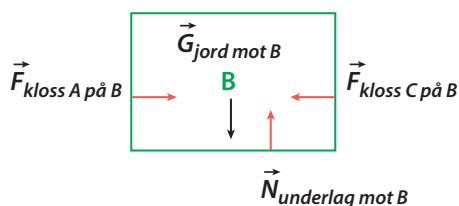
Figur 7.5 Frilegemediagram for A, B og C

Mens vi brukte Newtons tredje lov til å finne alle krefter som virker, Figur 7.3, bruker en Newtons første eller andre lov på frilegemediagrammer. Figur 7.5 viser at de ytre kreftene i vertikal retning opphever hverandre, og det samme gjør skyvekraftene mellom klossene. De er indre krefter i vårt system. Den eneste ytre kraften som får klossene til å akselerere er  $\vec{F}$ .

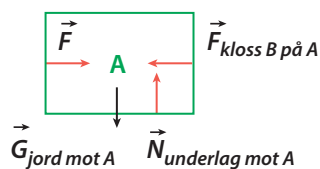
Systemets akselerasjon kan vi da finne ved å bruke Newtons andre lov.



Figur 7.6 Frilegemediagram for C



Figur 7.7 Frilegemediagram for B



Figur 7.8 Frilegemediagram for A

$$F = (m_A + m_B + m_C) a \quad (7.1)$$

$$a = \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} \quad (7.2)$$

Hva er så skyvekraften på klossen C fra B? La oss tegne et frilegemediagram, Figur 7.6, for C.

Også her opphever de vertikale kreftene hverandre, og vi står kun igjen med den ytre skyvekraften på C. Vi vet allerede C sin akselerasjon som er den samme som alle klossene har, og da kan vi finne skyvekraften siden vi vet massen til C ved hjelp av Newtons andre lov.

$$F_{kloss B \text{ på } C} = m_C \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} = \frac{F m_C}{(m_A + m_B + m_C)} \quad (7.3)$$

Vi ser at skyvekraften på C er mindre enn skyvekraften på A sin venstre side. Det kan se ut som om skyvekraften blir mindre jo lenger foran en kommer i kjeden av klosser.

La oss se hva skyvekraften på B er. På høyresiden blir det likt, men motsatt rettet den på C,  $\vec{F}_{kloss B \text{ på } C} = \vec{F}_{kloss C \text{ på } B}$ , men hva med skyvekraften på venstresiden? Frilegemediagrammet for B er gjengitt i Figur 7.7.

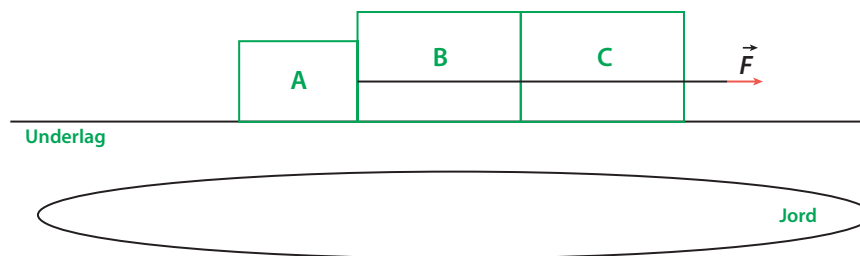
$$F_{kloss A \text{ på } B} = m_B \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} + F_{kloss C \text{ på } B} = \frac{F(m_B + m_C)}{(m_A + m_B + m_C)} \quad (7.4)$$

La oss for ordens skyld også regne ut skyvekraften på venstre siden av A. Igjen lager vi et frilegemediagram som vist i Figur 7.8.

$$F_{\text{på kloss fra venstre}} = m_A \frac{F}{(m_A + m_B + m_C)} + F_{kloss B \text{ på } A} = \frac{F m_A}{(m_A + m_B + m_C)} + \frac{F(m_B + m_C)}{(m_A + m_B + m_C)} = F \quad (7.5)$$

Vi ser at vi da får, ikke uventet, samme resultat som i (7.1). Skyvekraften blir altså mindre jo lenger forover i kjeden man kommer.

Den observante leser vil nok for lengst ha sett at det er en sammenheng mellom å skyve og å dra. Vi har fått de samme svarene for de tre klossene som i kapitlet «Systematisk til verks». Den eneste forskjellen er at vi har byttet om på klossene rekkefølge. En mulig måte å resonnerer på kunne være å tenke seg at en boret tynne hull gjennom klossene B og C og festet en snor i A – Figur 7.9. Ved å dra i denne snoren mot høyre ville en fått det samme resultatet som vi får når vi skyver fra venstre på A.



**Figur 7.9** En annen måte å se skyv på

Oppgave: Hvor stort skyv vil min nevø som veier 50 kg kjenne i ryggen når flyet han sitter i veier 70 000 kg og raser nedover rullebanen med en kraft på 720.000 N?

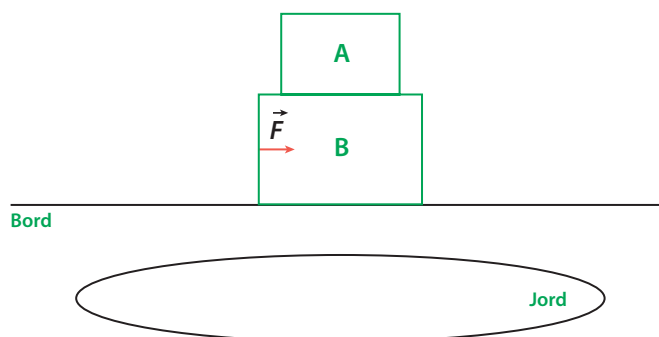
$$F_{\text{Fra fly på nevø}} = m_{\text{nevø}} \frac{F_{\text{På fly fra bakken}}}{(m_{\text{fly}} + m_{\text{nevø}})} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 720.000 \text{ N}}{(70.000 + 50) \text{ kg}} = 999,4 \text{ N} \quad (7.6)$$

Hvor stor er akselerasjonen i horisontal retning sammenlignet med tyngdens akselerasjon  $g$ ?

$$a = \frac{F_{\text{På fly fra bakken}}}{(m_{\text{fly}} + m_{\text{nevø}})} = \frac{720.000 \text{ N}}{(70.000 + 50) \text{ kg}} = 10,3 \text{ m/s}^2 \quad (7.7)$$

Han opplever en akselerasjon i horisontal retning på mer enn  $g$ . Ikke rart han synes det er morsomt!

Enda en oppgave: La oss vende tilbake til klosser. I Figur 7.10 ser du to klosser som er stablet. Det er ingen friksjon mellom bordet og den nederste klossen. Mellom de to klossene er den statiske friksjonen  $\mu_s = 0,2$ , mens den glidende er  $\mu_g = 0,1$ .

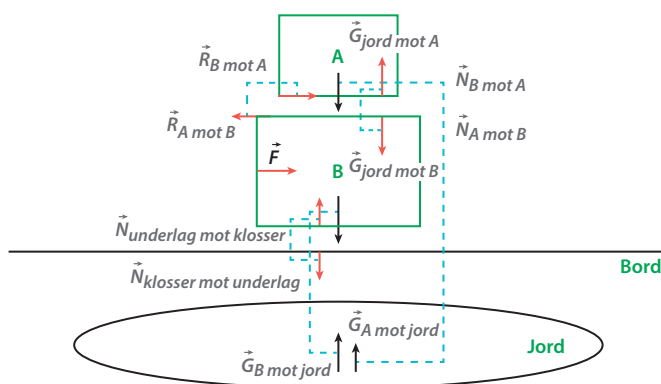


**Figur 7.10** To stablede klosser

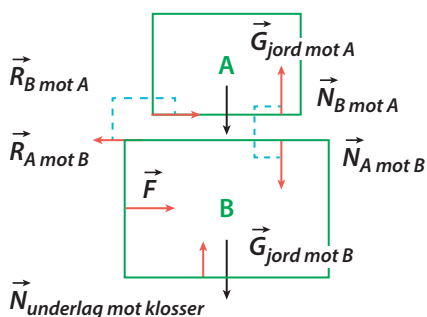
- Hva er den maksimale kraft som kan brukes på enten den nedre eller den øvre klossen for at de skal skli sammen bortover bordet?
- Hva er akselerasjonen da?

- c) Hva er akselerasjonen til kloss A som veier 3 kg dersom mer enn maksimumkraft regnet ut i a) brukes på kloss B som veier 5 kg? Og omvendt?

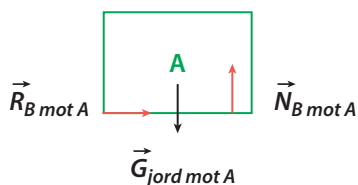
For å få oversikt kan det være greit å starte med å tegne inn alle krefter, selv om tegningen kan bli noe rotete med alle kreftene som virker.



**Figur 7.11** Alle kreftene som virker



**Figur 7.12** Frilegemediagram for klossene



**Figur 7.13** Frilegemediagram for øverste kloss

Som seg hør og bør kommer alle kreftene parvis som en konsekvens av Newtons tredje lov. For å komme videre må vi tegne frilegemediagrammer slik at vi kan anvende Newtons første og andre lov. Vi må se på systemet bestående av de to klossene.

I vertikal retning er summen av kreftene lik null. Vi skal finne den maksimale kraften  $\vec{F}$  før den øverste klossen på 3 kg begynner å skli.

$$F_{\text{begge klosser}} = (m_A + m_B) a \quad (7.8)$$

Siden den øverste klossen har samme akselerasjon som hele systemet, må:

$$F_{\text{øvre kloss}} = m_A a \quad (7.9)$$

Denne kraften er overført via friksjonen som vi ser i frilegemediagrammet for den øverste klossen i Figur 7.13.

Vi kan skrive:

$$F_{\text{øvre kloss}} = \mu_s N_{B \text{ mot } A} = 0,2 \cdot 3 \cdot 9,81 \text{ N} \quad (7.10)$$

Ved å bruke (7.9) og (7.10) finner vi et uttrykk for akselerasjonen  $a$ :



$$a = 0,2 \cdot 9,81 = 1,96 \text{ m/s}^2 \quad (7.11)$$

Ved å sette inn  $a$  i (7.8) finner vi maksimalkraften:

$$F_{\text{begge klosser}} = (m_A + m_B)a = 8 \cdot 0,2 \cdot 9,81 \text{ N} = 15,7 \text{ N} \quad (7.12)$$

Dersom vi hadde brukt kraften  $\vec{F}$  på den øvre klossen, ville vi ha fått det samme resultat av symmetrigrunner.

Vi har allerede regnet ut b) i (7.11).

Dersom vi bruker en kraft som er større enn maksimalkraften, som antydnet i oppgave d), er det den glidende friksjonen som gjelder  $\mu_g = 0,1$ . Akselerasjonen blir da:

$$a = 0,1 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,9 \text{ m/s}^2 \quad (7.12)$$

Når vi skyver på nederste kloss, vil den øverste klossen bevege seg bakover relativt til den nedre klossen. Omvendt vil den øverste klossen bevege seg relativt forover i forhold til nederste klossen dersom vi skyver på øverste kloss.



# 8

## Kapittel 8

---

# 33 1/3 rpm

«I'm so dizzy, my head is spinning.  
Like a whirlpool, it never ends. And it's you, girl,  
making it spin. You're makin' me dizzy.»

*Dizzy, Tommy Roe (1942-)*

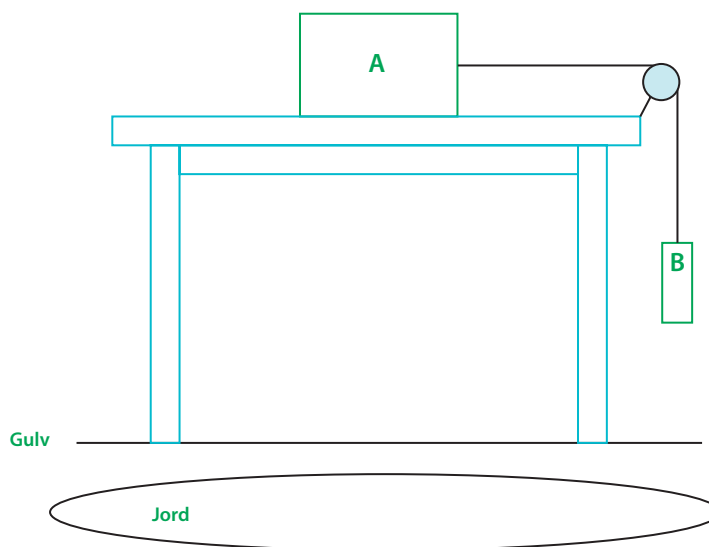
---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Trinse med masse, konisk pendel, rotasjon med konstant fart, vinkelhastighet, sentripetalakselerasjon, regulator, spinn, kraftmoment, vinkelakselerasjon, treghetsmoment, hovedtreghetsakser, jojo

---

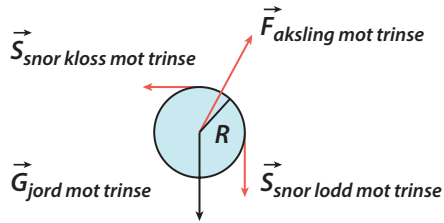
Alt går i sykluser. Ungdommen ved siden av med Fleksnes-hatt og skjegg, blar i vinylbunken i den lokale platebaren hvor det selges mer øl enn musikk. Selv strømmer jeg og har en platespiller hjemme som bare står til pynt. Den ble kjøpt for surt ervervede penger på syttitallet. Ikke hadde jeg råd til en dyr en med kjempetung platetallerken. Isteden ble det en direkte-drevet fra Technics med aluminiumstallerken, men like jevn og stabil gange som de vesentlig dyrere med remdrift. Med sjokk og vantro så jeg etter hvert hvordan generasjoner etter min egen mishandlet direkte-drevne platespillere. For DJ-er, hip-hopere og andre som drev med «scratching» og «backspinning» var direkte-driftens raske start, store kraftmoment og konstante omdreining samme hva de gjorde oppe på platetallerkenen, en gave fra himmelen. Populærkulturen kan takke ingeniøren Shuichi Obata for oppfinnelsen. Hva han selv syntes om bruken vet jeg ikke, men strålende salg i mer enn 40 år var han nok godt fornøyd med.

Figur 8.1 viser problemet vi så på i kapitlet «Innledende øvelse». Da anså vi trinsen for å være masseløs, men hva om den hadde masse? Det må ha en betydning, for ellers hadde det nok ikke blitt poengtert at den var masseløs i «Innledende øvelse».



**Figur 8.1** Kloss A dras og trinsen roteres av lodd B

Trinsen vil ha en akselerasjon langs periferien som er lik med kloss A og lodd B sin akselerasjon så lenge snoren ikke slipper over trinsen. For å få noe til å akselerere må det utsettes for en kraft. I dette tilfellet er det kun snordraget som kan tilføre denne kraften. Snordraget mellom kloss A og trinse må derfor være mindre enn snordraget mellom lodd B og trinse. Dersom du har problemer med å akseptere at den masseløse snoren kan ha ulikt snordrag før og etter trinsen, kan du sammenligne med det vi gjorde i kapitlet «Systematisk til verks». Der fant vi ut at snordraget ble mindre



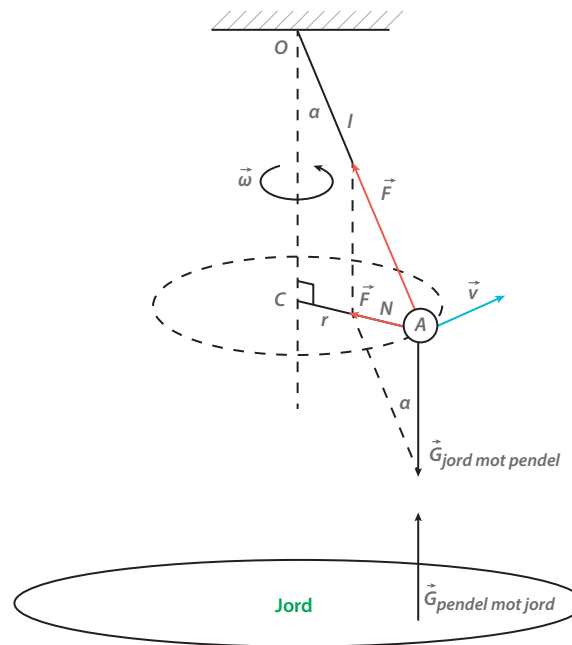
**Figur 8.2** Frilegemediagram for trinsen

jo lengre vi kom bak i kjeden av klosser. Du kan tenke at trinsen med masse er en «kloss» i kjeden fra loddet B og bakover til klossen A, og dermed blir snordraget forandret over trinsen. I Figur 8.2 er det vist et frilegemediagram for trinsen hvor  $R$  er radius til trinsen.

Da er det vel bare å bruke Newtons andre lov for å få med bidraget fra trinsen? Problemet er bare at summen av alle ytre krefter på trinsen er null. Riktignok vil trinsen dreie rundt sin akse med økende akselerasjon, og det skyldes kraftmomentet som snorkreftene gir.

Vi må bruke kraftmomentet for å beregne akselerasjonen langs periferien til trinsen. For å finne den, må vi først lære litt om rotasjon generelt.

La oss starte med jevn rotasjon. Da kunne vi brukt platespilleren som utgangspunkt, men siden vi er opptatt av snordrag, kan vi heller se på en konisk pendel – Figur 8.3.



**Figur 8.3** Konisk pendel

Pendelen roterer med en jevn fart  $v$  i horisontalplanet. I beskrivelsen av pendelens bevegelse får vi bruk for at vinkel målt i radianer er buen delt på radien. Følgelig er buen (en avstand) lik radien ganger vinkelen (målt i radianer).

Sammenhengen mellom strekning som tilbakelegges langs periferien og vinkel er:

$$s = r\theta \quad (8.1)$$

Farten langs periferien finner vi ved å derivere med konstant  $r$  (sirkelbevegelse):

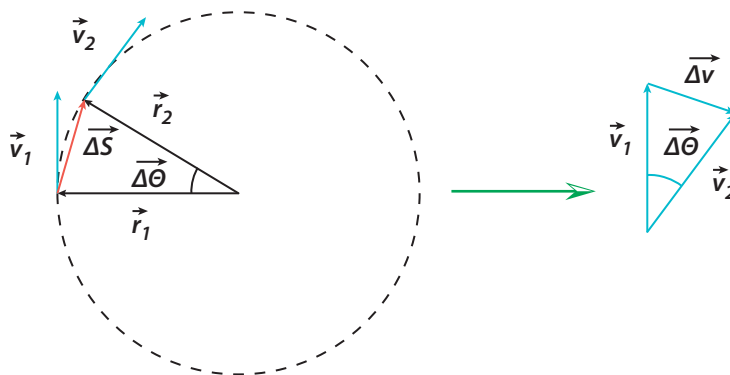
$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r \quad (8.2)$$

Størrelsen  $\omega$  kalles vinkelhastighet. I dette tilfellet er den konstant. (8.2) kan på vektorform skrives som:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (8.3)$$

Bruker vi den gode gamle høyrehåndsregelen, ser vi at  $\vec{\omega}$  peker oppover ved rotasjon mot klokken og nedover med rotasjon med klokken. Dersom du ikke husker høyrehåndsregelen, kan du lese mer om den i kapittelet «**Amors piler**» i appendiks.

Hastigheten  $\vec{v}$  er ikke konstant, men forandrer retning etter som A roterer rundt. Figur 8.4 illustrerer dette.



**Figur 8.4** Forandring av retning og hastighet

Vi ser at de to tegnede trekantene er formlike, og da har vi:

$$\frac{\vec{\Delta v}}{v} = \frac{\vec{\Delta s}}{r} \quad (8.4)$$

Dette kan vi bruke til å finne akselerasjonen som hele tiden peker mot sentrum  $C$  – sentripetalakselerasjon. Hadde den gjort noe annet, så hadde vi hatt akselerasjon langs banen til  $A$ , se kapittelet «**Alt er i endring**» i **Appendiks** for en nærmere forklaring:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{|\vec{\Delta v}|}{\Delta t} \right) = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{r} \quad (8.5)$$

En alternativ skrivemåte kan vi få ved å bruke resultatet fra (8.2).

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r \quad (8.6)$$

Vi kan nå bruke Figur 8.3 til å finne sentripetalkraftens størrelse:

$$F_N = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin(\alpha) \quad (8.7)$$

Der  $l$  er lengden på pendelen. Snordraget blir:

$$S = \frac{F_N}{\sin(\alpha)} = m\omega^2 l \quad (8.8)$$

Historisk sett har den koniske pendelen blitt brukt som fartsregulator i dampmaskiner for å få jevnt turtall. James Watt var den første til å bruke den til det i 1788, og han anvendte noe sterkere enn en snor.

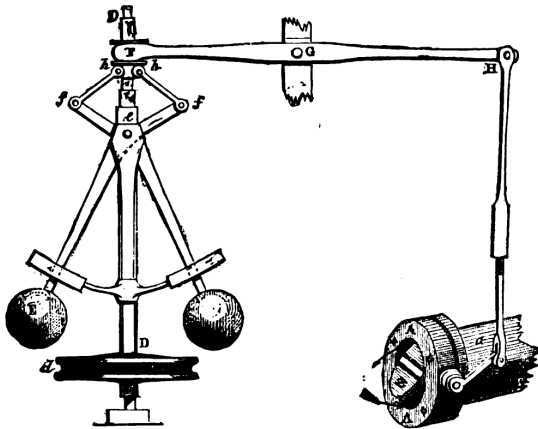


FIG. 4.--Governor and Throttle-Valve.

Figur 8.5 Watts regulator

Deler vi sentripetalakselerasjonen på tyngden, får vi et uttrykk for vinkelen  $\alpha$  som en funksjon av vinkelhastigheten  $\omega$ :

$$\tan(\alpha) = \frac{F_N}{G} = \frac{m\omega^2 l \sin(\alpha)}{mg} \quad (8.9)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{g}{\omega^2 l} \quad (8.10)$$

(8.10) viser at jo større vinkelhastighet  $\omega$  jo større blir vinkelen  $\alpha$  i Figur 8.3, og det brukte Watt til å strupe inntaksventilen for damp når maskinen gikk for fort rundt. Denne regulatoren var starten på fagfeltet reguleringsteknikk som nå sysselsetter ingeniører over hele kloden.

Det er en ting til vi skal se på før vi forlater den koniske pendel, nemlig spinnet. Det er definert som:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (8.11)$$

Spinnet  $\vec{L}$  er en vektor som står normalt på planet utspent av posisjonsvektoren  $\vec{r}$  og bevegelsesmengden  $\vec{p}$ . I vårt tilfelle med den koniske pendel vil  $\vec{L}$  peke i oppover og være gitt av:

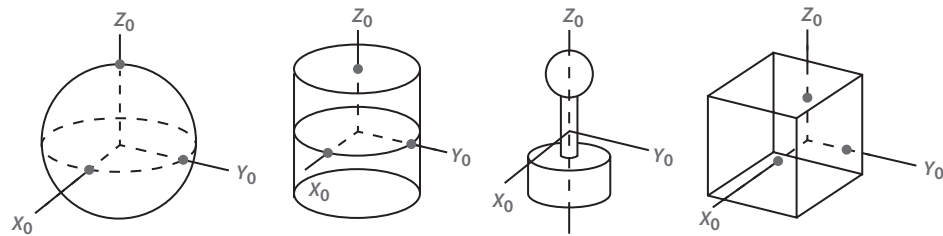
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\vec{\omega} \quad (8.12)$$

Dersom vi har et utstrakt legeme som roterer rundt en gitt akse, såkalt hovedtreghetsakse, hvor det totale spinn er parallelt med vinkelhastigheten, vil spinnet summere seg til å bli:

$$\vec{L} = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega} \quad (8.13)$$

Der  $I$  kalles treghetsmoment. Det regnes ut ved å addere produktene av massene til alle partiklene i et gitt legeme og kvadratene av deres avstander fra en gitt akse.

*Kommentar: Generelt er ikke  $\vec{L}$  parallell med  $\vec{\omega}$ , men det kan vises at for ethvert legeme finnes det minimum tre akser, såkalte hovedtreghetsakser, hvor  $\vec{L}$  er parallell med  $\vec{\omega}$ . Når legemene har en eller annen form for symmetri, er hovedtreghetsaksene lik symmetriaksene. I Figur 8.6 ser du noen eksempler på symmetriske legemer hvor hovedtreghetsaksene er gitt.*



**Figur 8.6** Symmetriske legemer og deres hovedtreghetsakser

I ledig stunder kan jo du more deg med å kaste mobiltelefonen din slik at den roterer. Du vil da se at den roterer ustabil rundt langsiden og stabilt langs de to andre sidene. Rotasjonen er stabil langs de sidene som har størst og minst treghetsmoment.

Vi har tidligere, i kapittelet «**Stabilt som et korthus**», vært borte i kraftmomentet  $\vec{\tau}$ . Ved å derivere  $\vec{L}$  med hensyn på tiden får vi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (8.14)$$

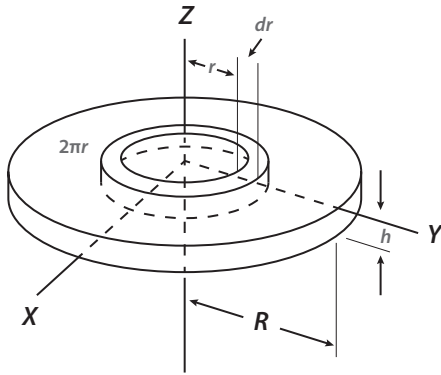
$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$ , da hastighet og moment peker i samme retning. Hvor  $\vec{\tau}$  er kraftmomentet en får på grunn av eksterne krefter. Ved å sette inn for  $\vec{L}$  får en videre:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d(\vec{\omega})}{dt} = I \vec{\alpha} \quad (8.15)$$

Der er  $\vec{\alpha}$  vinkelakselerasjonen til et legeme som utsettes for eksterne krefter. (8.15) er rotasjonens ekvivalent til Newtons andre lov. Vi kaller den spinnligningen. For å kunne anvende den, må vi finne treghetsmomentet til legemet vi ønsker å se på.

Vi har en forkjærlighet for trinser, og da er det naturlig å beregne treghetsmomentet for en skive som vist i Figur 8.7. Vi skal betrakte våre trinser som kompakte skiver.




**Figur 8.7** Treghetsmomentet for en skive

Volumet av den lille ringen i skiven er:

$$dV = (2\pi r)(dr)h \quad (8.16)$$

Ved å benytte integrasjon istedenfor summasjon siden vi har et sammensatt legeme, finner vi:

$$I = \int_0^R \rho r^2 (2\pi h r) dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 \quad (8.17)$$

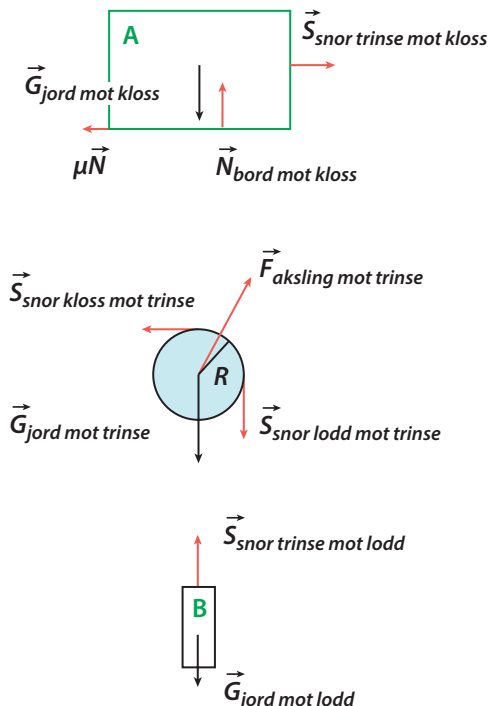
Der er  $\rho$  skivens tetthet. Massen til skiven er:

$$M = \rho(\pi R^2 h) \quad (8.18)$$

Dermed blir treghetsmomentet:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad (8.19)$$

Vi har nå det vi trenger for å ta trinsen med i beregningen av systemet i Figur 8.1. La oss tegne frilegemediagrammer for kloss, lodd og trinse.


**Figur 8.8** Frilegemediagrammer for utfordringen gitt i Figur 8.1

For å komme videre bruker vi Newtons andre lov på kloss og lodd og kraftmomentet rundt trinsens akse. Vi ser at de vertikale kreftene for kloss nuller seg ut. For klossen har vi:

$$S_{\text{snor trinse mot kloss}} - \mu N = m_A a \quad (8.21)$$

For trinsen gir momentet:

$$\tau = R(S_{\text{snor trinse mot lodd}} - S_{\text{snor trinse mot kloss}}) = I\alpha =$$

$$I \frac{a}{R} = \frac{1}{2} m_T R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} m_T R a \quad (8.22)$$

$$S_{\text{snor trinse mot lodd}} - S_{\text{snor trinse mot kloss}} = \frac{1}{2} m_T a \quad (8.23)$$

I (8.22) har vi brukt at sammenhengen mellom vinkelakselerasjon og akselerasjon langs periferien er  $a = R\alpha$ .

Til slutt har vi for loddet:

$$G_{\text{jord mot lodd}} - S_{\text{snor trinse mot lodd}} = m_B a \quad (8.24)$$

Nå har vi tre ligninger (8.21), (8.23) og (8.24) og tre ukjente  $a$ ,  $S_{\text{snor trinse mot kloss}}$  og  $S_{\text{snor trinse mot lodd}}$ .

$$S_{\text{snor trinse mot lodd}} - S_{\text{snor trinse mot kloss}} = -m_B a + G_{\text{jord mot lodd}} - m_A a - \mu N = \frac{1}{2} m_T a \quad (8.25)$$

$$-m_B a + m_B g - m_A a - \mu m_A g = \frac{1}{2} m_T a \quad (8.26)$$

$$a = \frac{g(m_B - \mu m_A)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2} m_T)} \quad (8.27)$$

Dette resultatet for akselerasjonen  $a$  ser rimelig ut. Gjør vi trinsen masseløs, vil vi få det samme resultatet som (5.10). Blir trinsens masse stor, vil akselerasjonen gå mot null fordi det ikke vil være kraft nok til å få trinsen til å rotere.

Når vi vet  $a$ , kan vi finne de respektive snordragene:

$$S_{\text{snor trinse mot kloss}} = m_A a + \mu m_A g \quad (8.28)$$

$$S_{\text{snor trinse mot kloss}} = m_A \frac{g(m_B - \mu m_A)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2} m_T)} + \mu m_A g \quad (8.29)$$

$$S_{\text{snor trinse mot kloss}} = \frac{g(m_A m_B (1 + \mu) + \mu \frac{1}{2} m_A m_T)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2} m_T)} \quad (8.30)$$

$$S_{\text{snor trinse mot lodd}} = m_B g - m_B \frac{g(m_B - \mu m_A)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2} m_T)} \quad (8.31)$$

$$S_{\text{snor trinse mot lodd}} = \frac{g(m_A m_B (1 + \mu) + \frac{1}{2} m_T m_B)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2} m_T)} \quad (8.32)$$

Vi ser at  $S_{\text{snor trinse mot lodd}}$  er større enn  $S_{\text{snor trinse mot kloss}}$ , og det må den være for at trinsen skal få en akselerasjon i samme retning som kloss og lodd. Resultatene ser rimelig ut, da  $S_{\text{snor trinse mot kloss}}$  blir lik  $S_{\text{snor trinse mot lodd}}$  når trinsen blir masseløs, og vi får da samme resultat som (5.14).

Bare for å være helt sikker på at vi har regnet riktig, kan vi trekke (8.32) fra (8.30) og sammenligne med (8.26):

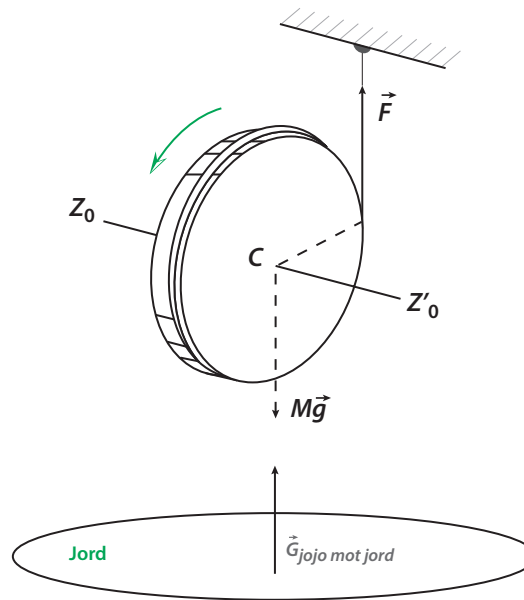
$$\begin{aligned} S_{\text{snor trinse mot lodd}} - S_{\text{snor trinse mot kloss}} = \\ \frac{g(m_A m_B (1 + \mu) + \frac{1}{2} m_T m_B)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2} m_T)} - \frac{g(m_A m_B (1 + \mu) + \mu \frac{1}{2} m_A m_T)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2} m_T)} \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\frac{g(\frac{1}{2}m_T m_B - \mu(\frac{1}{2}m_A m_T))}{(m_B + m_A + \frac{1}{2}m_T)} = \frac{1}{2}m_T a \quad (8.34)$$

$$\frac{g(\frac{1}{2}m_T m_B - \mu(\frac{1}{2}m_A m_T))}{(m_B + m_A + \frac{1}{2}m_T)} = \frac{1}{2}m_T \frac{g(m_B - \mu m_A)}{(m_B + m_A + \frac{1}{2}m_T)} \quad (8.35)$$

Med utgangspunktet i en snordragsoppgave, har vi lært oss en hel del om rotasjon og kan nå bruke den kunnskapen når det skal regnes på roterende legemer.

Med jevne mellomrom dukker jojoen opp som en farsott. Like moro er det hver gang, og det er fascinerende å se hvor langsomt den synker mot bakken. Vi er nå skodd til å regne ut akselerasjonen til en jojo. Figur 8.9 viser en forenklet tegning av en jojo med masse  $M$  og radius  $R$ .



**Figur 8.9** Jojo

$\vec{F}$  er den eneste kraften som bidrar til rotasjon, da tyngden angriper i aksen gjennom  $C$ . Spinnligningen (8.15) tar her formen:

$$\tau = RF = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad (8.36)$$

$$F = \frac{1}{2}MR\alpha \quad (8.37)$$

Jojoens massesenter  $C$  faller med akselerasjonen  $a = R\alpha$  fordi jojoen gir fra seg snor med denne akselerasjonen. Kraftene som virker på massesenteret er tyngden, og vi kan bruke Newtons andre lov for å få en ligning til:

$$Mg - F = Ma = MR\alpha \quad (8.38)$$

Ved å sette inn (8.37) i (8.38) finner vi jojoens akselerasjon:

$$a = \frac{2}{3}g \quad (8.39)$$

Akselerasjonen til jojoen er uavhengig av størrelse og masse.

Kraften  $F$  blir ved å bruke (8.37):

$$F = \frac{1}{2}MR\alpha = \frac{1}{3}Mg \quad (8.40)$$

## Kapittel 9

---

# Vel bevart

«Att og fram er like langt, inn og ut er like trangt.»

*Peer Gynt, Henrik Ibsen (1828–1906)*

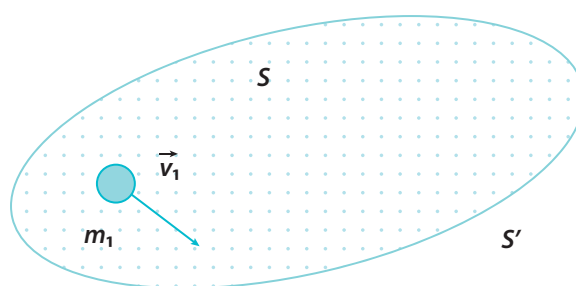
---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Isolert system, bevaring av bevegelsesmengde, arbeid, energi, kinetisk energi, konservative krefter, potensiell energi, bevaring av energi, pendel, pendelhastighet, pendelens snordrag, harmonisk oscillator, pendelens periode, støt, elastisk støt, løsningsstrategier for energiberegninger, kinetisk rotasjonsenergi, Atwoods fallmaskin løst ved hjelp av energibetraktninger, bruk av energiberegninger versus Newtons lover, bevaring av spinn, massesenter, massesenterhastighet, massesenterakselerasjon, virkeområder for Newtons andre og tredje lov

---

«Er du av typen som er svak for sport, men bare på skjermen og bare når vi vinner?» spør Jocke. Vel, mor og jeg har fått en forkjærlighet for snooker. Velklede menn støter kuler i hull etter veldefinerte regler. Mor rives med av spillet. mens jeg er mest opptatt av spillernes intuitive forståelse av fysikkens bevaringslover som ballenes kollisjoner styres av.

La oss starte på sedvanlig fysikervis og dele verden i to. I vårt system  $S$  i Figur 9.1 er det kun ett legeme, og i omgivelsene  $S'$  er det ingenting. Siden systemet  $S$  ikke har noen vekselvirkninger med legemer i omgivelsene  $S'$ , kaller vi  $S$  et isolert system. For lukkede systemer har vi en rekke bevaringslover.

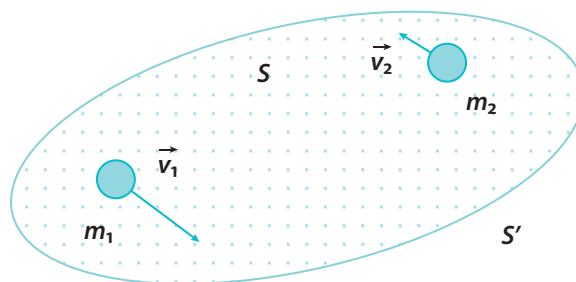


**Figur 9.1** Et ensomt legeme

I  $S$  har vi legemet  $m_1$  som har en hastighet  $\vec{v}_1$ . Siden legemet  $m_1$  ikke påvirkes av noen andre legemer, vil hastigheten være konstant og bevegelsesmengden bevart.

$$\vec{P} = \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = \text{konstant} \quad (9.1)$$

Det neste vi kan gjøre er å introdusere et nytt legeme  $m_2$  som har en hastighet  $\vec{v}_2$  i  $S$  som vist i Figur 9.2.



**Figur 9.2** To legemer

Dersom det ikke er noen form for vekselvirkning mellom de to legemene i vårt system S, vil ingen av dem endre hastighet, og bevegelsesmengden er fremdeles bevart.

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{konstant} \quad (9.2)$$

Hva om det er en form for vekselvirkning mellom de to legemene? Hva ville da skje? Det vil bli endringer i hastighetene, men bevegelsesmengden vil fremdeles være den samme. Slik vil det alltid være i et isolert system samme hvor mange legemer som svirrer rundt der. Det er en naturlov, og den inneholder Newtons lover som en konsekvens.

### Bevaring av bevegelsesmengde:

**Dersom et system er isolert, er den totale bevegelsesmengden konstant.**

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = \text{konstant.}$$

Er det mer å hente ut av denne naturloven? Vel, siden den handler om noe som totalt er konstant, bevegelsesmengden, over tid, så kan en jo se på hva det fører til for vårt system med to legemer, ved å derivere med hensyn på tiden.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \quad (9.3)$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (9.4)$$

Forandringen i bevegelsesmengde for de to legemene er like stor, men motsatt rettet. Så kan vi følge i Newtons fotspor og kalle årsaken til denne endringen en kraft  $\vec{F}$ .

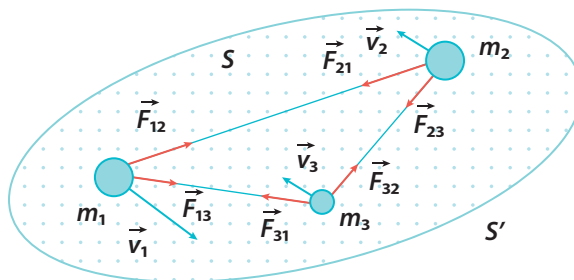
$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = m_1 \vec{a}_1 \quad (9.5)$$

Indekseringen på kraften indikerer at her er det legeme 2 som virker på legeme 1. Vi ser at krefter gir opphav til akselerasjon. Dette er Newtons andre lov. Newtons tredje lov er gitt i (9.4), og med krefter kan den skrives.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (9.6)$$

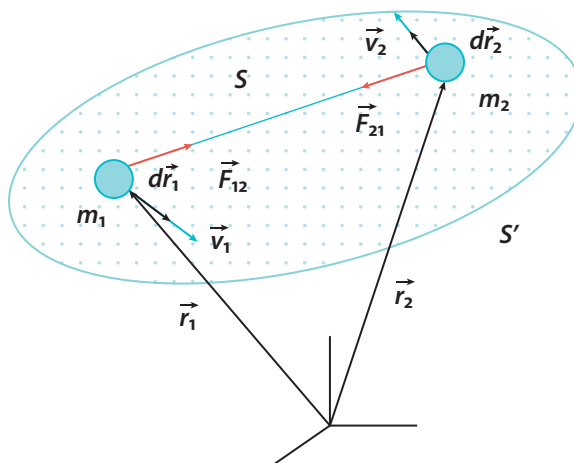
Newtons første og andre lov handler om hvordan et legeme påvirkes, mens Newtons tredje lov handler om vekselvirkning mellom to legemer.

I et isolert system er summen av alle krefter lik null. Disse kreftene kalles indre krefter da de virker mellom legemer i systemet. I Figur 9.3 er et system med tre legemer og deres vekselvirkninger tegnet inn.



**Figur 9.3** Tre legemer med vekselvirkninger

La oss for enkelhetens skyld gå tilbake til vårt isolerte system, Figur 9.4, med to legemer: Hvordan vil det endre seg over tid når det er vekselvirkning mellom legemene?



**Figur 9.4** To legemer med vekselvirkninger

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 \quad (9.7)$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 \quad (9.8)$$

I et lite tidsintervall  $dt$  vil det første legemet endre sin posisjonsvektor  $\vec{r}_1$  med  $d\vec{r}_1$  langs  $\vec{v}_1$  og det andre legemet med  $d\vec{r}_2$  langs  $\vec{v}_2$ . Vi tar så skalarprodukter for finne hastighetsendringene langs banene de to legemene følger. Hvorfor vi kun ser på hastighetsendring langs banene, vil bli klart etter at vi har regnet litt videre, og resultatet vi får har vi stor glede av.



$$\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 = m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 \quad (9.9)$$

$$\vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 \quad (9.10)$$

Så kan vi addere (9.9) og (9.10) samt bruke det faktum, Newtons tredje lov, at  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \quad (9.11)$$

Siden akselerasjon er hastighetsvariasjon med hensyn på tid, kan vi skrive om (9.11).

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \quad (9.12)$$

Som igjen kan omformes.

$$m_1 \vec{v}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \vec{v}_2 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (9.13)$$

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad (9.14)$$

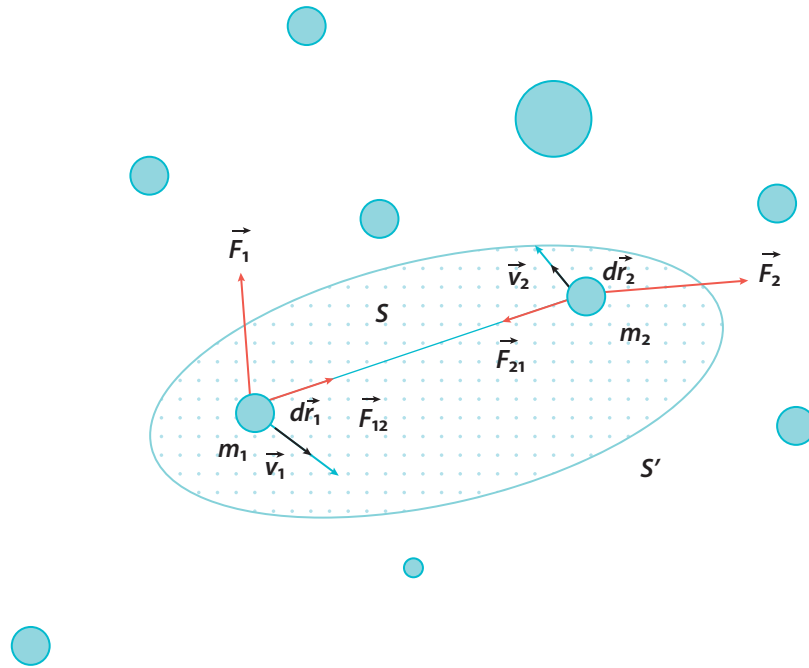
Så kan vi integrere fra en starttid  $t_0$  til en vilkårlig tid  $t$ .

$$m_1 \int_{v_{10}}^{v_1} dv_1 + m_2 \int_{v_{20}}^{v_2} dv_2 = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad (9.15)$$

Hvor A og B angir de to legemenes utgangspunkter og endepunkter for bevegelsene. Det vi har på høyre siden av ligningen, er indre arbeid i systemet arbeid,  $W_{indre}$ , utført av de to kreftene på hverandre. Siden disse kreftene er indre krefter i vårt system, kalles det tilhørende arbeidet for indre arbeid.

$$W_{indre} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad (9.16)$$

Dette indre arbeidet forandrer ikke bevegelsesmengden til systemet, men kan overføre bevegelsesmengde fra det ene legemet til det andre i vårt system. Skal den totale bevegelsesmengden for systemet endres, må det påvirkes av ytre krefter som kan utføre arbeid på det, slik som vist i Figur 9.5.



**Figur 9.5** System med to legemer som også er påvirket av ytre krefter

Hadde det også vært ytre krefter som påvirket vårt system, så hadde (9.15) fått følgende form.

$$m_1 \int_{v_{10}}^{v_1} v_1 dv_1 + \int_{v_{20}}^{v_2} m_2 v_2 dv_2 = W_{indre} + W_{ytre} \quad (9.17)$$

Hvor:

$$W_{ytre} = \int_A^B (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2) \quad (9.18)$$

Generelt er arbeid definert som linjeintegralet av kraften langs en gitt vei.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (9.19)$$

Etter denne lille digresjonen om ytre krefter, er det på tide å vende tilbake til vårt isolerte system med to legemer som vist i Figur 9.4 og arbeide videre med ligning (9.15). Venstresiden kan integreres ferdig.

$$\left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \right) = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad (9.20)$$

$$\left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left( \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \right) = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad (9.21)$$

$$E_k - E_{k0} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad (9.22)$$

$E_k$  kalles den totale kinetiske energien ved et tidspunkt  $t$  og  $E_{k0}$  ved  $t_0$ .

Se for deg at våre to legemer er sol og jord. De går i bane rundt hverandre, men siden solen har mye større masse enn jorden, er det sistnevnte som får mest bevegelse. I løpet av den tiden det tar å ta en runde, vil hastighetene endre seg hele tiden.

I løpet av en runde er:

$$E_{k \text{ en runde}} - E_{k0} = \oint \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad (9.23)$$

Den lille rundingen på integraltegnet betyr at en tar linjeintegralet i en lukket bane. La oss sette inn gravitasjonskraften og se hva høyre siden blir.

$$\oint \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = -\oint \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12} = \gamma m_1 m_2 \left[ \frac{1}{r_{12}} \right]_A^A = 0 \quad (9.24)$$

Det betyr at de individuelle hastighetene etter en runde er de samme som ved start. En kraft som har den egenskap at et lukket linjeintegral er null, kalles konservativ. Ønsker du å vite mer om gravitasjonskraften, er det bare å ta en titt i kapitlet «**Et graverende eksempel**» i appendiks.

Det ser ut som om vi er på sporet av noe som er bevart over tid. Det er bare å sette inn gravitasjonsloven i (9.22) og integrere et stykke.

$$E_k - E_{k0} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = - \int_A^B \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12} = \gamma m_1 m_2 \left[ \frac{1}{r_{12}} \right]_A^B \quad (9.25)$$

$$E_k - E_{k0} = \gamma m_1 m_2 \left( \frac{1}{r_{12B}} - \frac{1}{r_{12A}} \right) = E_{p0} - E_p \quad (9.26)$$

Hvor:

$$E_{p0} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12A}} \quad (9.27)$$

$$E_p = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12B}} \quad (9.28)$$

Vi har i (9.27) og (9.28) funnet uttrykk for det som kalles potensiell energi i henholdsvis posisjonen A ved  $t_0$  og B ved  $t$ . Savner du  $E_p = mgh$ ? Sammenhengen mellom det vi har gjort her og det du husker fra tidligere, finner du i appendikskapitlet «**Et graverende eksempel**».

Ordner vi litt på ligningen (9.26), får vi at summen av kinetisk energi og potensiell energi når en har gravitasjonskrefter, er konstant.

$$E_{konstant} = E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = \text{konstant} \quad (9.29)$$

$E_{konstant}$  er den totale mekaniske energien til det isolerte systemet. Dette resultatet, loven om energibevaring, fant vi som en konsekvens av loven om bevaring av

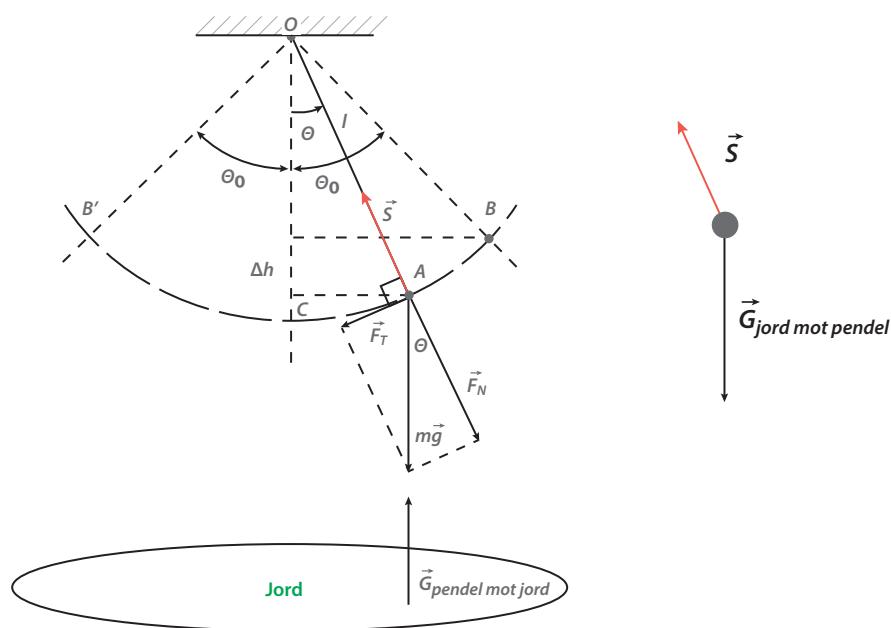
bevegelsesmengde og at den indre kraften var konservativ. Men det ser ut som om denne loven har allmenn gyldighet for alle prosesser i universet. Dersom du for eksempel ser på elektrisk kraft, Coulombs lov, så har vekselvirkningen mellom to ladninger samme form som gravitasjonskraften og er også en konservativ kraft. Det som kjennetegner begge disse vekselvirkningene, er at kreftene er sentralsymmetriske og kun avhenger av avstanden mellom henholdsvis legemer med masse eller ladning. Det er det som gjør dem konservative, og dermed er energien bevart.

En kan tolke kinetisk energi for et legeme som den energi det har i øyeblikket på grunn av sin fart, og potensiell energi som den energi et legeme har på grunn av sin posisjon.

Skal en endre energien til et system, så må det virke ytre krefter på det som utfører et arbeid på systemet.

$$E_{\text{konstant}} + W_{\text{ytre}} \quad (9.30)$$

Med denne ballasten med lover om bevaring er det kanskje på tide med eksempler for å forstå dem. Se Figur 9.6. Til venstre ser vi hele systemet pendel pluss jord og til høyre et frilegemediagram for pendelkule hvor kreftene som virker på den, tyngdekraften og snordraget, er tegnet inn. Jeg drar pendelens kule mot høyre og ser hva som skjer. Pendelen starter med hastighet null. Farten langs banen øker og når sitt maksimum i nedre posisjon, og så minker farten igjen til den blir null. Uten friksjon ville dette fortsatt i all evighet. Det er tydeligvis noe som er bevart og som kan holde dette gående.



Figur 9.6 En enkel pendel

Før vi ser nærmere på bevaringslovene, kan det være nyttig å lære pendelen å kjenne ved å regne ut pendelens fart langs banen, snordrag og dens periode. Perioden er den tid det tar for pendelen å gjøre et omløp.

La oss begynne med å regne ut farten langs banen utstyrt med Newtons andre lov. Det kommer til å ta litt tid, men vi skal senere se at utstyrt med bevaringsligninger, kan vi utføre denne beregningen vesentlig lettere. Når vi senere møter problemer i fysikken, kan vi velge å bruke enten Newtons lover eller bevaringsligninger under mottoet målet helliger middelet.

Det er kun to krefter som virker på pendelens kule, nemlig tyngdekraften og snordraget. Snordraget vil ikke gi noe bidrag til farten langs banen, da det står normalt på banen. Kraften langs banen blir:

$$F_T = -mg\sin(\theta) \quad (9.31)$$

Her har det sneket seg inn et minustegn siden kraften virker mot  $C$ . Siden pendelens kule beveger seg i en sirkelbane, kan vi bruke det vi fant i «33 1/3 rpm», ligning (8.15):

$$ml\alpha = -mg\sin(\theta) \quad (9.32)$$

$$l\frac{d\omega}{dt} = -g\sin(\theta) \quad (9.33)$$

For å komme videre kan vi bruke at  $\omega = d\theta/dt$ , som gir  $dt = d\theta/\omega$ :

$$l\omega d\omega = -g\sin(\theta)d\theta \quad (9.34)$$

For å finne vinkelhastigheten er det bare å integrere:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = -\frac{g}{l} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin(\theta) d\theta \quad (9.35)$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{l} [\cos(\theta) - \cos(\theta_0)] \quad (9.36)$$

Her har vi antatt at vi starter med hastighet lik null. Det endelige uttrykket for farten langs banen blir:

$$v = l\omega = \sqrt{2gl[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)]} = \sqrt{2g\Delta h} \quad (9.37)$$

$\Delta h$  er høydeforskjellen mellom startpunkt og det stedet vi måler farten langs banen. Se Figur 9.7. Vi ser at farten er størst i bunnen av banen, og det er som forventet. Formelen for farten  $v$  langs banen ble fascinerende enkel.

Så var det snordraget. Siden kulen beveger seg i en sirkelbane, har en:

$$F_{\text{sentripetal}} = S - F_N \quad (9.38)$$

$$F_N = mg \cos(\theta) \quad (9.39)$$

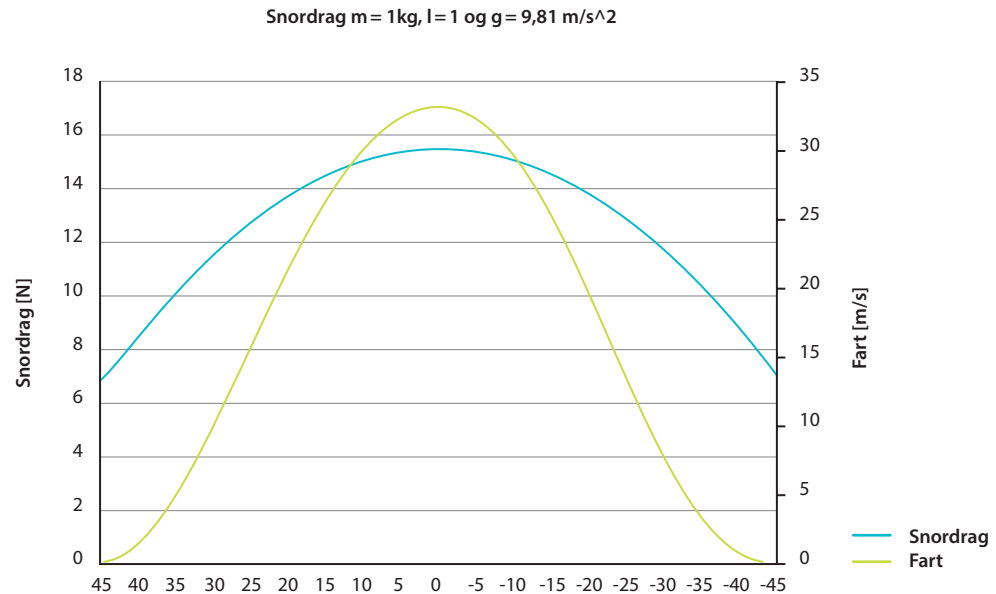
Sentripetalakselerasjonen fant en i «33 1/3 rpm» ligning 8.5 til å være  $v^2/l$ , og da finner vi at snordraget  $S$  kan uttrykkes:

$$S = m \frac{v^2}{l} + mg \cos(\theta) \quad (9.40)$$

Vi har allerede regnet ut farten langs banen, og innsatt den får en:

$$S = m \frac{2gl[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)]}{l} + mg \cos(\theta) = mg[3 \cos(\theta) - 2\cos(\theta_0)] \quad (9.41)$$

Vi ser at også snordragets størrelse varierer, og det er størst i bunnen av banen. Alle som har hatt gleden av å bruke en huske i barndommen eller i mer voksenalder, har kjent at trykket mot baken øker med farten og er størst i bunnen av huskens bane. I Figur 9.7 ser du snordraget og farten for en pendel med masse på ett kg og lengde på én meter som starter med en utgangsvinkel på 45 grader.



Figur 9.7 Fart og snordrag for en pendel

Så var det å finne et uttrykk for pendelens periode. Vi kan ta utgangspunkt i (9.31):

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin(\theta) \quad (9.42)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \quad (9.43)$$

(9.43) er en annenordens differensialligning som er vanskelig å løse fordi en har det ulineære sinusleddet i formelen. For små vinkler, mindre enn  $15^\circ$ , har en at  $\sin(\theta) \approx \theta$ , og da kan en skrive:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (9.44)$$

Pendelen har en bevegelsesligning (9.44) som i fysikken kalles en harmonisk oscillator. I differensialligningen (9.44) skal  $\theta$  kunne uttrykkes med noe som derivert to ganger blir likt det negative av seg selv. Da står cosinus og sinus lagelig til for hogg. Vinkelen kan uttrykkes på formen:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.45)$$

Hvor  $\omega^2 = g/l$ . At det stemmer, kan du sjekke ved å bruke (9.14) i (9.13). Det er denne sinusaktige oscillerende bevegelsen som er årsaken til at en kaller bevegelsen harmonisk. Perioden for pendelen er den tid det tar for et omløp:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9.46)$$

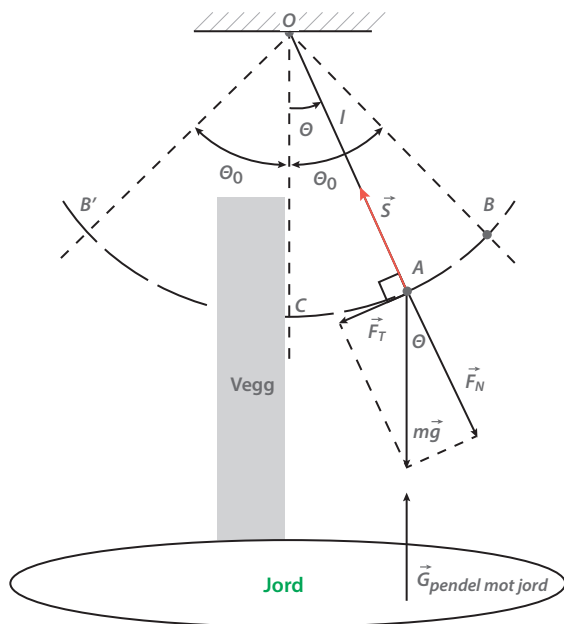
Vi ser at pendelens periode, (9.46), er uavhengig av dens masse.

Dette får være nok innledende øvelser. La oss se på bevaringslover ved å bruke pendelen som eksempel. Det første vi skal la pendelen møte, er den berømte veggen slik som vist i Figur 9.8.

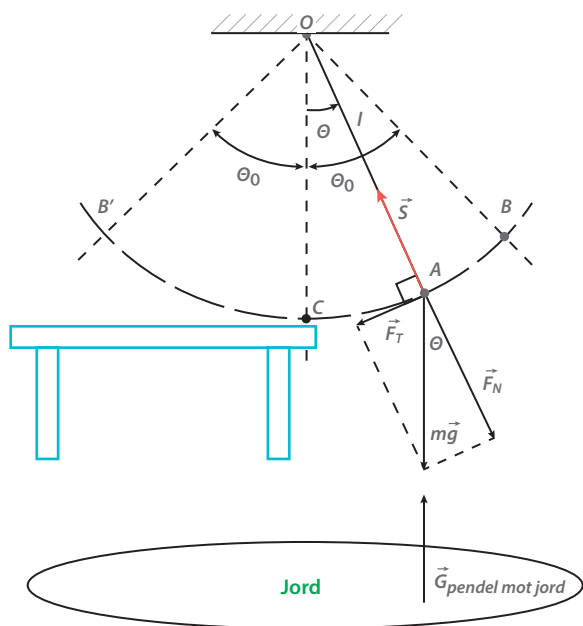
I møte med veggen, som antas å være et ubevegelig legeme, har vi en før- og etter-situasjon. Vi observerer at idet pendelkulen, som også er et stivt legeme, treffer veggen, har den fart  $v$  og rett etter en fart  $-v$ . Veggen tilfører pendelkulen et elastisk støt med en kraft  $\vec{F}$ :

$$|\vec{F} \Delta t| = |\Delta \vec{p}| = mv - (-mv) = 2mv \quad (9.47)$$

Kraftens størrelse er her avhengig av hvor lenge støtet varer. Et elastisk støt er et støt mellom stive legemer.



**Figur 9.8** En enkel pendel som møter veggen



**Figur 9.9** En enkel pendel som treffer en kule med samme masse

Hva ville skje dersom vi lot pendelen treffe en kule med samme masse – Figur 9.9?

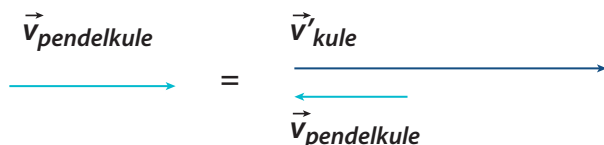
La oss se på en før- og etter-situasjon og skrive:

$$m\vec{v}_{\text{pendelkule}} + m\vec{v}_{\text{kule}} = m\vec{v}'_{\text{pendelkule}} + m\vec{v}'_{\text{kule}} \quad (9.48)$$

$$\vec{v}_{\text{pendelkule}} = \vec{v}'_{\text{pendelkule}} + \vec{v}'_{\text{kule}} \quad (9.49)$$

De merkede hastighetene er etter støtet og de umerkede før.  $\vec{v}_{\text{kule}} \equiv 0$  før støtet. Her har vi en ligning og to ukjente  $\vec{v}'_{\text{pendelkule}}$  og  $\vec{v}'_{\text{kule}}$ . I Figur 9.10 har vi vist en mulig løsning:

At  $\vec{v}'_{\text{kule}}$  skulle bli større enn  $\vec{v}'_{\text{pendelkule}}$  virker en smule ufysskisk. Det påstås at TV er fordummende, men etter timer med snooker så vet vi det rette svaret. Etter støtet vil  $\vec{v}'_{\text{pendelkule}}$  være lik 0 og  $\vec{v}'_{\text{kule}} = \vec{v}_{\text{pendelkule}}$ . De to kulene bytter hastighet, og bevegelsesmengden er bevart. At naturen velger denne løsningen blant mange mulige, skyldes bevaring av energi.



**Figur 9.10** Mulig løsning på to like kuler som støter i hverandre hvor den ene er i ro før støtet

$$U = E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \text{konstant} \quad (9.50)$$

Idet pendelen treffer kulen, har de samme potensielle energi, og energibevaring gir oss da

$$U = E_{k1} = E_{k2} = \text{konstant} \quad (9.51)$$

Den samlede kinetiske energien må være lik før og etter støtet. Ved å bruke ligningen for energi (9.51) som også må være oppfylt i tillegg, har vi to ligninger og to ukjente.

$$m_{\text{pendelkule}}\vec{v}_{\text{pendelkule}} + m_{\text{kule}}\vec{v}_{\text{kule}} = m_{\text{pendelkule}}\vec{v}'_{\text{pendelkule}} + m_{\text{kule}}\vec{v}'_{\text{kule}} \quad (9.52)$$

$$\frac{1}{2} m_{\text{pendelkule}} (v_{\text{pendelkule}})^2 + \frac{1}{2} m_{\text{kule}} (v_{\text{kule}})^2 = \frac{1}{2} m_{\text{pendelkule}} (v'_{\text{pendelkule}})^2 + \frac{1}{2} m_{\text{kule}} (v'_{\text{kule}})^2 \quad (9.53)$$

Som du kanskje ser, så har vi fjernet vektorene på hastighetene, og det kan vi gjøre hvis en antar at hastighetene får samme eller motsatt retning.

Etter litt regning får en følgende:



$$v_{\text{pendelkule}}' = \frac{m_{\text{pendelkule}} v_{\text{pendelkule}} + m_{\text{kule}} v_{\text{kule}} - m_{\text{kule}}(v_{\text{pendelkule}} - v_{\text{kule}})}{m_{\text{pendelkule}} + m_{\text{kule}}} \quad (9.54)$$

$$v_{\text{kule}}' = \frac{m_{\text{pendelkule}} v_{\text{pendelkule}} + m_{\text{kule}} v_{\text{kule}} + m_{\text{pendelkule}}(v_{\text{pendelkule}} - v_{\text{kule}})}{m_{\text{pendelkule}} + m_{\text{kule}}} \quad (9.55)$$

Da er det på tide med et gjensyn med veggen som vi kan gi navnet kule, og som har en stor masse og fart  $v_{\text{kule}} = 0$ :

$$v_{\text{pendelkule}}' = \frac{\frac{m_{\text{pendelkule}}}{m_{\text{kule}}} v_{\text{pendelkule}} - (v_{\text{pendelkule}})}{\frac{m_{\text{pendelkule}}}{m_{\text{kule}}} + 1} \approx -v_{\text{pendelkule}} \quad (9.56)$$

$$v_{\text{kule}}' = \frac{\frac{m_{\text{pendelkule}}}{m_{\text{kule}}} v_{\text{pendelkule}} + v_{\text{kule}} + \frac{m_{\text{pendelkule}}}{m_{\text{kule}}}(v_{\text{pendelkule}} - v_{\text{kule}})}{\frac{m_{\text{pendelkule}}}{m_{\text{kule}}} + 1} \approx v_{\text{kule}} = 0 \quad (9.57)$$

Vi ser at vi får det vi observerte, nemlig at pendelkulen støtes tilbake med like stor fart som den traff veggen med, men motsatt rettet.

Hva skjer når kulene har samme masse?

$$v_{\text{pendelkule}}' = \frac{v_{\text{pendelkule}} + v_{\text{kule}} - (v_{\text{pendelkule}} - v_{\text{kule}})}{2} = v_{\text{kule}} \quad (9.58)$$

$$v_{\text{kule}}' = \frac{v_{\text{pendelkule}} + v_{\text{kule}} + (v_{\text{pendelkule}} - v_{\text{kule}})}{2} = v_{\text{pendelkule}} \quad (9.59)$$

Kulene bytter hastighet. Det er det vi ser i snooker også når den ene kule står i ro før støtet og får hastigheten til den andre etter støtet.

En strategi for å løse energiproblemer kan oppsummeres til [3]:

**Tabell 9.1** Løsningsstrategi for energiproblemer

#	Løsningsrekkefølge
1.	Lag en tegning som viser før- og etter-situasjonen
2.	Bruk energikonservering på formen $E_k \text{ før} + E_p \text{ før} + W_{\text{ikke kons}} + W_{\text{omgivelser}} = E_k \text{ etter} + E_p \text{ etter}$ . Her har vi også tatt med ikke-konservative krefter og arbeid fra omgivelsene inn i energiloven.
3.	Tegn frilegemediagrammer og beregn arbeid
4.	Løs energiligning

Leser du nøye i Tabell 9.1 så ser du at det har sneket seg inn noe nytt, nemlig arbeid utført av ikke konservative krefter,  $W_{\text{ikke kons}}$ . Hva er det for noe? Vel, det er krefter som får vår mekaniske energi til å gå over til andre former. Et typisk eksempel er friksjon som får vår mekaniske energi til å gå over til varme. Totalt sett vil alltid energien, mekanisk pluss andre energiformer, være bevart.

Med vår nye kunnskap om energi er det bare å gå tilbake og prøve å løse gamle problemer med nye metoder. Det viser seg ofte at å bruke energibetraktninger er enklere enn å bruke Newtons lover. Vi brukte jo «litt» tid og krefter i innledningen for å finne pendelens fart langs banen ved å bruke Newtons andre lov. Nå kan vi prøve å bruke energibetraktning isteden. Øverst i banen har vi kun potensiell energi og i bunnen kun kinetisk energi:

$$mg \Delta h = \frac{1}{2} m v^2 \quad (9.60)$$

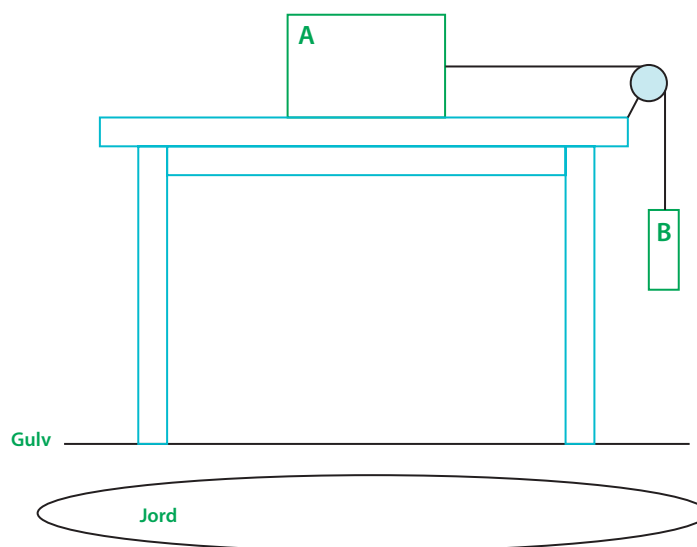
$$v = \sqrt{2g \Delta h} = \sqrt{2gl[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)]} \quad (9.61)$$

Dette er det samme resultatet som vi fant i (9.37) og som igjen kan brukes til å finne snordraget på samme måte som i (9.40). Det er bare å gråte av glede over hvor lett det ble.

En har altså flere måter å angripe fysikkproblemer på. En kan bruke enten Newtons lover eller bevaringslover eller en kombinasjon. Som ellers i livet, er det minste motstands vei som blir det førende prinsipp.

Er det flere gamle problemer å gå løs på? Hva med den innledende øvelsen fra kapitlet «33 1/3 rpm»?

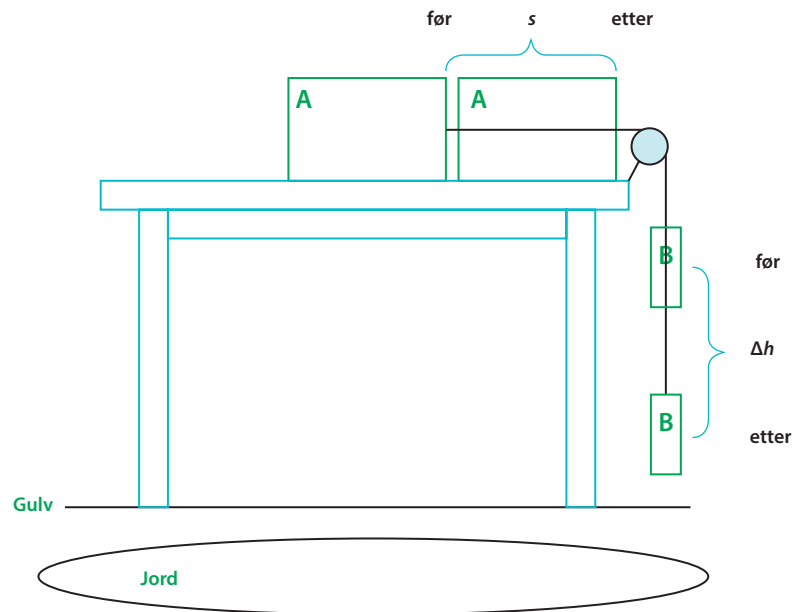
I Figur 9.11 har vi en kloss A med masse  $m_A$  og et lodd B med masse  $m_B$ . Friksjonskoeffisienten mellom kloss A og bord er  $\mu$  og trinsen har en masse  $m_T$ .



**Figur 9.11** Klassisk snordragsoppgave

- Tegn figur med alle kreftene som virker på kloss og lodd
- Forklar tydelig hvordan du regner ut akselerasjonen for klossen. Finn formel
- Finn snorkraften (snordraget) på klossen og loddet
- Vi stanser klossen og holder den i ro. Hvor stor blir snorkraften da?

Her hopper vi over a) da det er energibetraktninger vi skal gjøre. Vi trenger ikke tegne krefter eller snordrag. La oss heller starte med b) og følge strategien for energi-beregninger ved å tegne Figur 9.11 som viser før- og etter-situasjonen.



**Figur 9.12** «Før» og «etter» for vårt system

Så er det bare å skrive energiligningen for det isolerte systemet i Figur 9.12. Vel, vi har en liten utfordring. Vi vet ikke hvordan vi kan uttrykke kinetisk rotasjonsenergi. Trinsen vil jo rotere, og for å få til det må den få tilført potensiell energi som omsettes til kinetisk energi. Vi må gå tilbake til definisjonen av kinetisk energi:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.62)$$

Når et stivt legeme roterer rundt en akse med vinkelhastighet  $\omega$ , så vil hver partikkel legemet består av få en fart  $v_i = \omega r_i$  som vi så i (8.2).

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (9.63)$$

(9.63) gir oss den kinetiske energien for et roterende legeme, og dermed har vi det som trengs for vårt lille energibudsjett:

$$m_B g h_{\text{øverst}} - \mu m_A g s = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 + m_B g h_{\text{nederst}} \quad (9.64)$$

$I_T$  er treghetsmomentet til trinsen. Vi utnytter så den kjensgjerning at lodd og kloss henger sammen og dermed må ha samme fart.

$$m_B g \Delta h - \mu m_A g s = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 \quad (9.65)$$

Her er friksjonen  $-\mu m_A$  en ikke konservativ kraft som gjør at noe av den potensielle energien omgjøres til varme istedenfor kinetisk energi. Så forenkler vi ved å benytte oss av det faktum at strekningen  $s$  er like lang som  $\Delta h$  og at  $I_T = \frac{1}{2} m_T R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_T v^2$ .

$$(m_B g - \mu m_A g) \Delta h = \frac{1}{2} \left( m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T \right) v^2 \quad (9.66)$$

$$v = \sqrt{2 \left( \frac{m_B g - \mu m_A g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T} \right) \Delta h} \quad (9.67)$$

Dette kjenner vi igjen fra (9.61) og (4.4), og akselerasjonen er:

$$a = \left( \frac{m_B g - \mu m_A g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T} \right) \quad (9.68)$$

Akkurat det samme som vi fant i (8.27). Snordragene i c) som er krefter, kan vi ikke finne ved energibetraktninger, så da er det bare å bruke Newtons andre lov på klossen:

$$S_{\text{snor trinse mot kloss}} = m_A a + \mu m_A g = m_A \left( \frac{m_B g - \mu m_A g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T} \right) + \mu m_A g \quad (9.69)$$

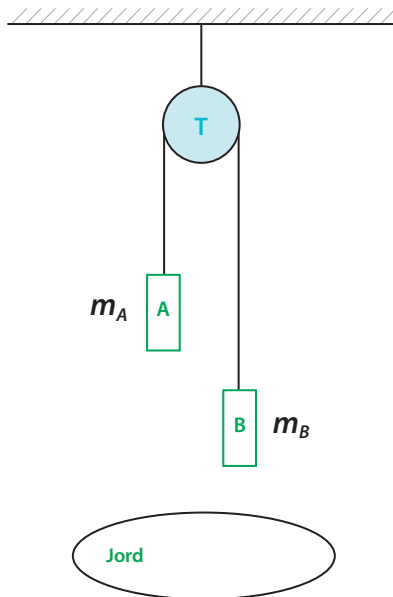
$$S_{\text{snor trinse mot lodd}} = m_B g - m_B a = m_B g - m_B \left( \frac{m_B g - \mu m_A g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T} \right) \quad (9.70)$$

Dette er også likt med det vi fant i «33 1/3 rpm» ligning (8.27) og (8.31)

Når vi holder klossen i ro d), er det det samme som å gi den en veldig stor masse og  $\mu = 0$  siden det hele står i ro:

$$S_{\text{snor trinse mot kloss}} = m_A a = m_B g \left( \frac{1}{1 + \frac{m_B + \frac{1}{2} m_T}{m_A}} \right) \approx G \quad (9.71)$$

Snordraget blir likt tyngden.



**Figur 9.12** Atwoods fallmaskin en gang til

Hva så med Atwoods fallmaskin – Figur 9.12? Riktignok ble den laget lenge før energibegrepet kom på plass, men la oss prøve å regne ut dens akselerasjon med energibevaring for det isolerte systemet jord og fallmaskin som utgangspunkt. Vi trenger ikke tenke på krefter eller snordrag. Det er bare å sette opp energiligningen. Siden vi ikke har gjort det før, så tar vi med at trinsen har masse  $m_T$ .

$$m_A g h_{\text{øverst}} = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 + m_B g h_{\text{nederst}} \quad (9.72)$$

$$(m_A - m_B) g \Delta h = \frac{1}{2} (m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T) v^2 \quad (9.73)$$

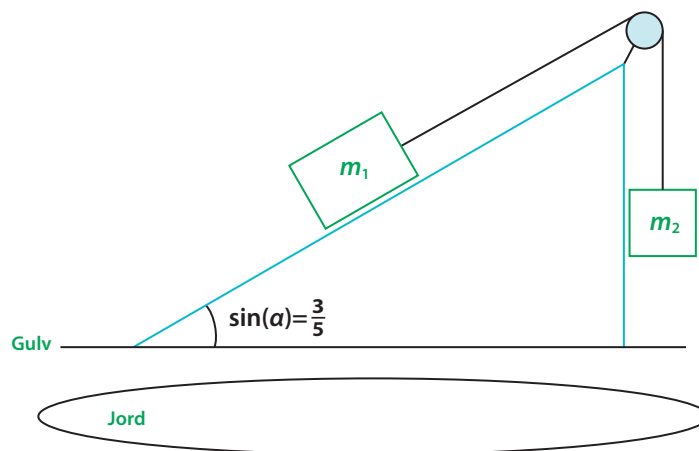
$$v = \sqrt{2 \left( \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T} \right) g \Delta h} \quad (9.74)$$

Akselerasjonen blir, med referanse til formel (4.4):

$$a = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B + \frac{1}{2} m_T)} g \quad (9.75)$$

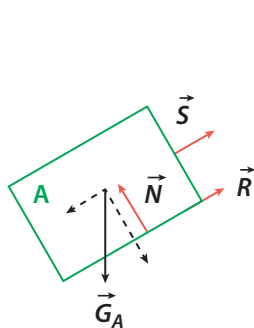
Akkurat som det vi fant i kapittelet «**Historisk sett**» ligning (4.7) med unntak av trinsen, da den var masseløs i det tilfellet. At Atwood ikke så at den mekaniske energien er bevart er kanskje litt rart, men nå er jo retroskopet et litt urettferdig instrument.

Før vi gir oss helt med energibetraktninger, kunne det jo være nyttig å prøve seg på en klassisk snordragsoppgave hvor en løser den både ved hjelp av Newtons lover og alternativt ved å se på energibevaring. En kloss A kan gli på et skråplan der hellingsvinkelen  $\alpha$  er bestemt ved  $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ . Se Figur 9.13. I A er det festet en snor som går over en masseløs trinne T og ender i en annen kloss B. Tyngden av A er 10 N og av B 5,2 N. Dersom vi gir A et lite puff nedover, vil den fortsette med konstant fart.

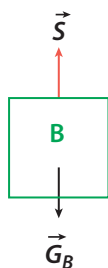


**Figur 9.13** Skråplan med klosser

- Finns friksjonskoeffisienten mellom klossen A og skråplanet. Hvor stort er snordraget?
- Kloss B blir skiftet ut med en annen kloss C med tyngde 10 N. Vi lar C starte fra en utgangsstilling der klossene er i ro. Regn ut akselerasjonen klossene får. Hvor stort er snordraget nå? Tyngdens akselerasjon er  $10 \text{ m s}^{-2}$ .
- Hvor stor fart har C når den treffer gulvet etter et fall på 0,20 m? Hvor langt glir klossen A oppover skråplanet etter at klossen C har truffet gulvet?
- Fra det tidspunkt C begynner å falle til A har nådd sitt høyeste punkt på skråplanet, er noe potensiell energi gått over i varme. Finn denne energien.



**Figur 9.14** Frilegemediagrammer for klossene A og B



La oss begynne med Newton. Vi starter som sedvanlig med å tegne frilegemediagrammer for klossene som vist i Figur 9.14. Snordraget er likt overalt, da snoren er masseløs. Vi har også dekomponert tyngden til kloss A langs og normalt på skråplanet. Normalkomponenten «nuller» av normalkraften fra skråplanet på klossen.

Da er det bare å ta i bruk Newtons andre lov på de to klossene. Vi antar at systemet beveger seg mot venstre:

$$m_A g \sin(\alpha) - R - S = m_A a \quad (9.76)$$

$$S - m_B g = m_B a \quad (9.77)$$

Nå har vi fått opplyst at klossen A og dermed hele systemet har konstant fart. Da er felles akselerasjon  $a = 0$ . Vi kan da skrive videre på våre to ligninger:

$$m_A g \frac{3}{5} - \mu N - S = 0 \quad (9.78)$$

$$S - m_B g = 0 \quad (9.79)$$

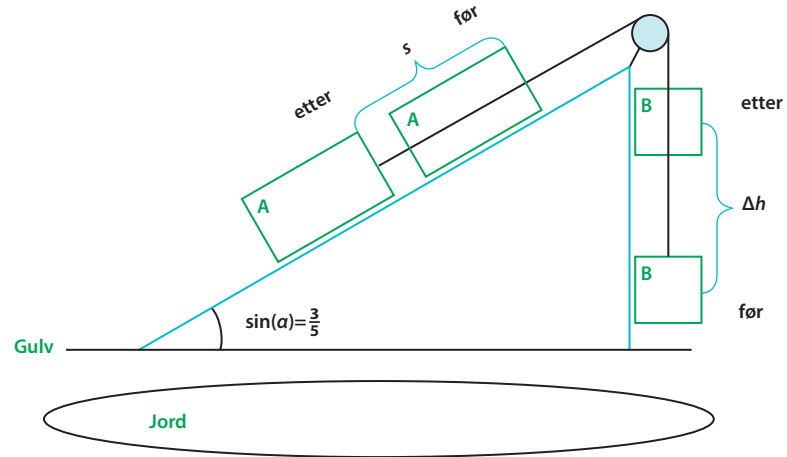
Da har vi to ligninger med to ukjente, nemlig  $\mu$  og  $S$ . La oss starte med å finne  $\mu$ :

$$m_A g \frac{3}{5} - \mu N - m_B g = 0 \quad (9.80)$$

$$10 \cdot N \cdot \frac{3}{5} - \mu \cdot N \cdot \cos(\alpha) - 5,2 \cdot N = 0 \quad (9.81)$$

$$\mu = 0,1 \quad (9.82)$$

Er det mulig å finne friksjonskoeffisienten  $\mu$  med energibetraktninger? Da kan det være lurt å følge strategien for å løse energiproblemer som er oppgitt i Tabell 9.1. Vi starter med en før- og etter-tegning gitt i Figur 9.15.



Figur 9.15 Før- og etter-tegning

Så der det bare å bruke formelen for energikonservering:

$$E_{kA \text{ før}} + E_{pA \text{ før}} + E_{kB \text{ før}} + E_{pB \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} + W_{\text{omgivelser}} = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kB \text{ etter}} + E_{pB \text{ etter}} \quad (9.83)$$

Siden farten var konstant, så er den kinetiske energien til systemet like stor «før» og «etter», og vi kan skrive:

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pB \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} + W_{\text{omgivelser}} = E_{pA \text{ etter}} + E_{pB \text{ etter}} \quad (9.84)$$

Systemet blir heller ikke påført noe arbeid utenfra, så da sitter vi igjen med:

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pB \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} = E_{pA \text{ etter}} + E_{pB \text{ etter}} \quad (9.85)$$

Så må vi sette inn arbeidet som friksjonen utfører på systemet og som går over i varme.

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pB \text{ før}} - \mu m_a g \cos(\alpha) = E_{pA \text{ etter}} + E_{pB \text{ etter}} \quad (9.86)$$

Når kloss B hever seg  $\Delta h$ , har en:

$$-\mu m_a g \cos(\alpha) \Delta h = -m_a g \sin(\alpha) \Delta h + m_b g \Delta h \quad (9.87)$$

$$-\mu m_a g \frac{4}{5} = -m_a g \frac{3}{5} + m_b g \quad (9.88)$$

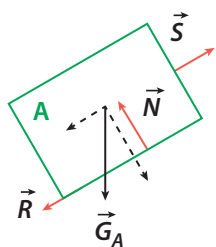
$$-\mu \cdot 10 \text{ N} \cdot \frac{4}{5} = -10 \text{ N} \cdot \frac{3}{5} + 5,2 \text{ N} \quad (9.89)$$

$$\mu = 0,1 \quad (9.90)$$

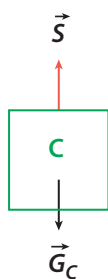
Vi fant altså friksjonskoeffisienten med begge metoder. Når det gjelder snordraget, kommer dessverre energibetraktninger til kort da vi snakker om en kraft. Vi må tilbake til Newton. Siden vi har jevn fart, er summen av kreftene på begge klosser lik null, og det er lettest å finne snordraget  $S$  ved å bruke formelen for kloss B:

$$S = m_b g = 5,2 \text{ N} \quad (9.91)$$

Dermed var a) unnagjort.



**Figur 9.16** Frilegemediagrammer for klossene A og C



Så blir kloss B skiftet ut med en tyngre kloss C. Dermed vil vi få en akselerasjon mot høyre, og friksjonen vil virke i den andre retningen. Friksjonen virker jo alltid mot bevegelsen. Igjen skal vi prøve begge metoder, Newtons lover og energibetraktninger, for å finne akselerasjonen. La oss starte med Newton. Vi tegner for sikkerhets skyld frilegemediagrammer på nytt.

Igjen blir det å hente frem Newtons andre lov og bruke den på de to klossene:

$$S - m_A g \sin(\alpha) - R = m_A a \quad (9.92)$$

$$m_C g - S = m_C a \quad (9.93)$$

Vi begynner med å sette inn de kjente størrelsene:

$$S - 10 \text{ N} \cdot \frac{3}{5} - 0,1 \text{ N} \cdot \frac{4}{5} = \frac{10}{10} \text{ kg} \cdot a \quad (9.94)$$

$$10 \text{ N} - S = \frac{10}{10} \text{ kg} \cdot a \quad (9.95)$$

La oss finne akselerasjonen  $a$  først:

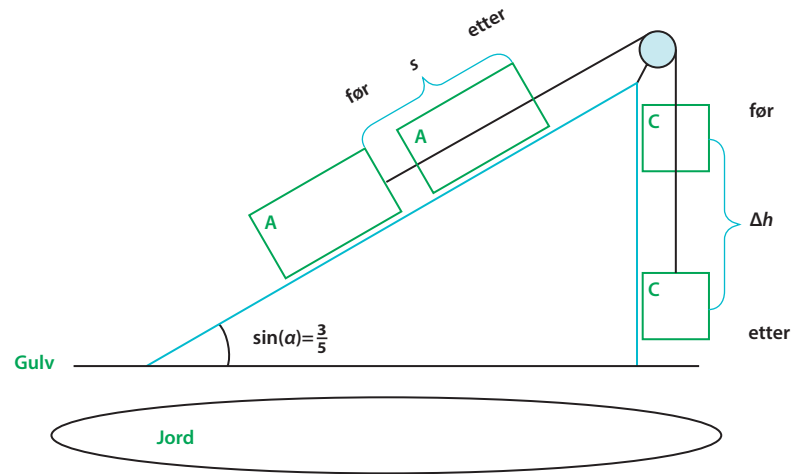
$$S - 6 \text{ N} - 0,8 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot a \quad (9.96)$$

$$(10 \text{ N} - 1 \text{ kg} \cdot a) - 6 \text{ N} - 0,8 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot a \quad (9.97)$$

$$a = 1,6 \text{ m/s}^2 \quad (9.98)$$

Så var det energibetraktninger. Vi lager en før- og etter-tegning i Figur 9.17:





Figur 9.17 Før- og etter-tegning

Igjen er det bare å finne frem formelen for energikonservering:

$$E_{kA \text{ før}} + E_{pA \text{ før}} + E_{kC \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} + W_{\text{omgivelser}} = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.99)$$

Siden farten var null ved start, kan vi skrive:

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} + W_{\text{omgivelser}} = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.100)$$

Systemet blir heller ikke påført noe arbeid utenfra, så da sitter vi igjen med:

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.101)$$

Så må vi sette inn arbeidet som friksjonen utfører på systemet, og som går over i varme.

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} - \mu m_A g \cos(\alpha) \Delta h = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.102)$$

Når kloss C synker  $\Delta h$ , har en:

$$-\mu m_A g \cos(\alpha) \Delta h = \frac{1}{2}(m_A + m_C)v^2 + m_A g \sin(\alpha) \Delta h - m_C g \Delta h \quad (9.103)$$

$$-\mu m_A g \frac{4}{5} \cdot \Delta h = \frac{1}{2}(m_A + m_C)v^2 + m_A g \frac{3}{5} \cdot \Delta h - m_C g \cdot \Delta h \quad (9.104)$$

$$-0,1 \cdot 10 \text{ N} \cdot \frac{4}{5} \cdot \Delta h = \frac{1}{2}(2)v^2 + 10 \text{ N} \cdot \frac{3}{5} \cdot \Delta h - 10 \text{ N} \cdot \Delta h \quad (9.105)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot \Delta h} \text{ m/s} \quad (9.106)$$

Denne formelen kjenner vi igjen fra Galileo Galileis forsøk i kapittelet «**Historisk sett**» (4.4) når utgangsfart og posisjon er null, og det er bare å plukke ut akselerasjonen:

$$a = 1,6 \text{ m/s}^2 \quad (9.107)$$

Snordraget finner vi ved å sette inn for akselerasjonen i uttrykket (9.95) vi fant ved å bruke Newtons lover:

$$10 \text{ N} - S = 1 \text{ kg} \cdot a \quad (9.108)$$

$$10 \text{ N} - S = 1,6 \text{ N} \quad (9.109)$$

$$S = 8,4 \text{ N} \quad (9.110)$$

Så var det c). Vi skal først finne ut hvor stor fart C har når den treffer gulvet etter å ha falt 0,2 m. Da er det bare å finne frem kinematikk-kunnskapene. Siden C startet med null fart fra utgangsposisjon  $s_0 = 0$ , kan vi bruke:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad (9.111)$$

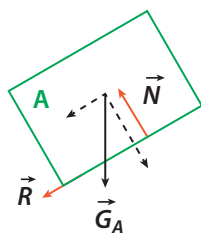
$$v = at \quad (9.112)$$

Så kvitter vi oss med tiden ved å sette de to formlene sammen og løse med hensyn på farten:

$$s = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 \quad (9.113)$$

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ m}} = 0,8 \text{ m/s} \quad (9.114)$$

Idet kloss C treffer gulvet, har altså også kloss A en fart på 0,8 m/s langs skråplanet. Friksjon og tyngdens komponent vil retardere klossen til den får fart lik null. Vi skal finne ut hvor langt kloss A glir. Igjen kan det være greit med et frilegemediagram, Figur 9.18.



**Figur 9.18** Frilegemediagram for klossen A

Igjen starter vi med Newton og setter opp Newtons andre lov for kloss A:

$$-m_A g \sin(\alpha) - R = m_A a \quad (9.115)$$

Vi må finne akselerasjonen (retardasjonen):

$$-m_A g \sin(\alpha) - \mu m_A g \cos(\alpha) = m_A a \quad (9.116)$$

$$-6 \text{ N} - 0,1 \cdot 8 \text{ N} = m_A a \quad (9.117)$$

$$a = -6,8 \text{ m/s}^2 \quad (9.118)$$

Vi vet at slutfarten skal være null, og da kan vi bruke følgende relasjon til å finne ut hvor lang tid det tar:

$$v = v_0 + at \quad (9.119)$$

$$0 = 0,8 \text{ m/s} - 6,8 \text{ m/s}^2 \cdot t \quad (9.120)$$

$$t = 0,11 \text{ s} \quad (9.121)$$

Det kan vi så sette inn i strekningsligningen:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (9.122)$$

$$s = 0,8 \text{ m/s} \cdot 0,11 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 6,8 \text{ m/s}^2 \cdot (0,11 \text{ s})^2 = 0,047 \text{ m} \quad (9.123)$$

Klossen glir altså 0,047 meter oppover skråplanet etter at klossen C har truffet gulvet.

Da er det bare d) igjen. Vi skal finne hvor mye av energien som har gått over i varme fra C begynte å falle. Vel, det er kloss A som er utsatt for friksjon. Først 0,2 meter sammen med C før C nådde bakken, og så 0,047 meter etterpå. Kloss A utfører arbeid på skråplanet og mister derfor en del energi. Mengden kan vi finne ved å bruke formelen for arbeid:

$$W = Rs = \mu m_A g \cos(\alpha) \cdot (0,20 \text{ m} + 0,047 \text{ m}) = 0,1 \cdot 10 \text{ N} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0,247 \text{ m} = 0,198 \text{ J} \quad (9.124)$$

I tillegg taper systemet energi når klossen C treffer gulvet:

$$E_{kC \text{ etter}} = \frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot (0,8 \text{ m/s})^2 = 0,32 \text{ J} \quad (9.125)$$

Den totale energien som går over i arbeid, er:

$$W + E_{kC \text{ etter}} = 0,32 \text{ J} + 0,198 \text{ J} = 0,518 \text{ J} \quad (9.126)$$

Riktignok brukte vi litt energibetraktninger her på slutten for å finne svaret, men er det mulig å komme frem til det samme svaret, samt finne ut hvor langt klossen A glir oppover skråplanet som vi ble spurt om i c), med rene energibetraktninger? Før- og etter-figuren har vi jo allerede tegnet i Figur 9.17.

Frem med formelen for energikonservering:

$$E_{kA \text{ før}} + E_{pA \text{ før}} + E_{kC \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} + W_{\text{omgivelser}} = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.127)$$

Vi definerer «etter» som det tidspunkt hvor kloss A stopper. Siden farten var null ved start, kan vi skrive:

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} + W_{\text{omgivelser}} = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.128)$$

Systemet blir heller ikke påført noe arbeid utenfra:

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} + W_{\text{ikke kons}} = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.129)$$

Så må vi sette inn arbeidet som friksjonen utfører på systemet, og som går over i varme.  $x$  er det stykket klossen A glir etter at kloss C har truffet gulvet,

$$E_{pA \text{ før}} + E_{pC \text{ før}} - \mu m_A g \cos(\alpha)(\Delta h + x) = E_{kA \text{ etter}} + E_{pA \text{ etter}} + E_{kC \text{ etter}} + E_{pC \text{ etter}} \quad (9.130)$$

Når kloss C synker  $\Delta h$  og kloss A har stoppet, har en:

$$-\mu m_A g \cos(\alpha)(\Delta h + x) = \frac{1}{2} m_C v_C^2 + m_A g \sin(\alpha)(\Delta h + x) - m_C g \Delta h \quad (9.131)$$

$$-0,1 \cdot 10 \text{ N} \cdot \frac{4}{5} \cdot (0,2 \text{ m} + x) = \frac{1}{2}(1 \text{ kg}) \cdot (0,8 \text{ m/s})^2 + 10 \cdot \frac{3}{5} \cdot (0,2 \text{ m} + x) - 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m} \quad (9.132)$$

$$x = 0,047 \text{ m} \quad (9.133)$$

Da kan vi regne ut energien som går over i varme:

$$W_{\text{ikke kons}} + E_{kC \text{ etter}} = 0,1 \cdot 10 \text{ N} \cdot \frac{4}{5} \cdot (0,2 \text{ m} + 0,047 \text{ m}) + \frac{1}{2}(1 \text{ kg})(0,8 \text{ m/s})^2 = 0,518 \text{ J} \quad (9.134)$$

Som vi ser, er det i hvert fall to veier som fører til Rom.

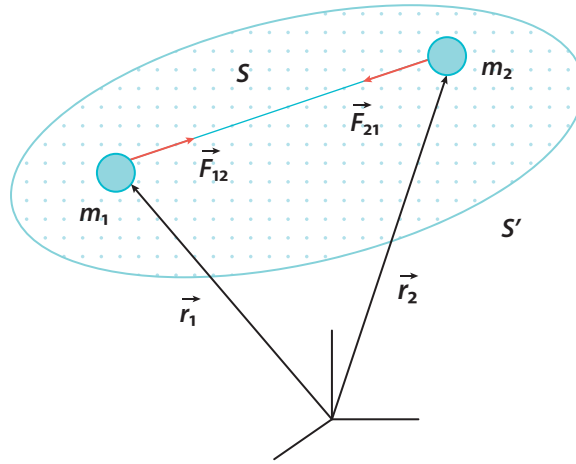
Er det andre ting enn bevegelsesmengde og energi som er bevart? Vi var så vidt innom det i «33 1/3 rpm». Vi så på spinnnet definert som:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (9.135)$$

Vi deriverte så spinnnet med hensyn på tiden og fant at:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (9.136)$$

Hvor  $\vec{\tau}$  er kraftmoment. La oss se på vårt isolerte system som vist i Figur 9.19.



**Figur 9.19** Isolert system med to legemer med vekselvirkning

Hvor stort er det totale kraftmomentet?

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0 \quad (9.137)$$

Vektoren  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  er parallell med kraften, og dermed er det totale kraftmomentet null.

For et isolert er  $\sum \vec{\tau} = 0$ , og dermed er  $\vec{L}$  en bevart størrelse da  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ .

### Bevaring av spinn:

**Når summen av kraftmoment som virker på et system er lik null, er det totale spinnet konstant (konservert).**  $\vec{L} = L_1 + L_2 + \dots = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) + \dots = \text{konstant.}$

Vi antok at kreftene i vårt isolerte system var sentralkrefter for å finne at spinn er bevart, men det synes som om alle isolerte har bevaring av spinn selv om det ikke er snakk om sentralkrefter.

Har du vært i Fysikkbygget på Blindern? Jeg har brukt mye tid i den vakre foajeen for å se på Foucaults pendel, Figur 9.20, som henger der. Den ble funnet opp av Bernard Foucault i 1851 for å bevise en gang for alle at jorden roterte.

Står du lenge nok, vil du se at svingeplanet endrer seg relativt til jorden, fordi spinnet til pendelen har konstant retning. La oss sjekke med vår egen pendel.

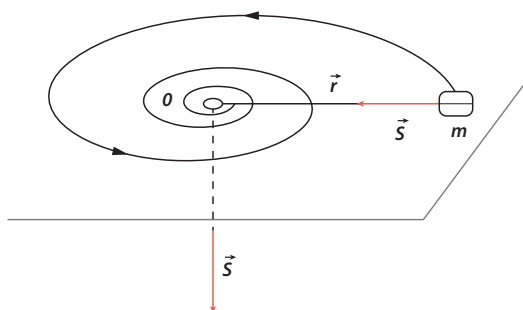
Vi har funnet tallverdien for  $\vec{L}$ :

$$L = lmv = lm\sqrt{2gl[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)]} \quad (9.138)$$

Her vil  $L$  variere hele tiden, og  $\vec{L}$  vil stikke ut av papiret når pendelen beveger seg mot høyre, og inn i papiret når bevegelsen går andre veien. Det eneste som virker bevart er at  $L$  varierer langs pendelens akse. Her må vi se på hele systemet pendel pluss jord. Når vår pendels  $L$  varierer, vil jorden kompensere med å sette opp et motsatt spinn slik at det hele blir en bevart størrelse. Sett fra omgivelsene, universet, vil pendelens baneplan være fiksert, og alt er dermed i sin skjønneste orden.



**Figur 9.20** Foucaults pendel på Blindern



**Figur 9.21** Legeme som roterer

Før vi bokstavelig talt runder av dette kapittelet, kan det være nyttig med en øvelse hvor spinnets bevaring er et sentralt tema, og igjen har vi gleden av en snor som nå snurrer rundt med tilhørende snordrag. Et lite legeme med masse  $m$  er bundet til en snor på et friksjonsfritt underlag, se Figur 9.21. Den andre enden av snoren dras ned i et hull med konstant fart. Finn snordraget som en funksjon av avstanden  $r$  mellom legemet og hullet dersom vinkelhastigheten til snoren ved  $r = r_0$  er  $\omega_0$ . Finn også arbeidet som utføres.

Det vil ikke være noe kraftmoment her da  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{S} = 0$ , og dermed er spinnet bevart. Vi kan skrive:

$$I_0 \omega_0 = I \omega \quad (9.139)$$

Setter vi inn treghetsmomentet for massen, finner vi:

$$m r_0^2 \omega_0 = m r^2 \omega \quad (9.140)$$

Dette kan løses med hensyn på vinkelhastigheten  $\omega$  i posisjon  $r$ :

$$\omega = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0 \quad (9.141)$$

Snordraget må være lik sentripetalakselerasjonen:

$$S = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = m \left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0\right)^2 r = m \frac{\omega_0^2 r_0^4}{r^3} \quad (9.142)$$

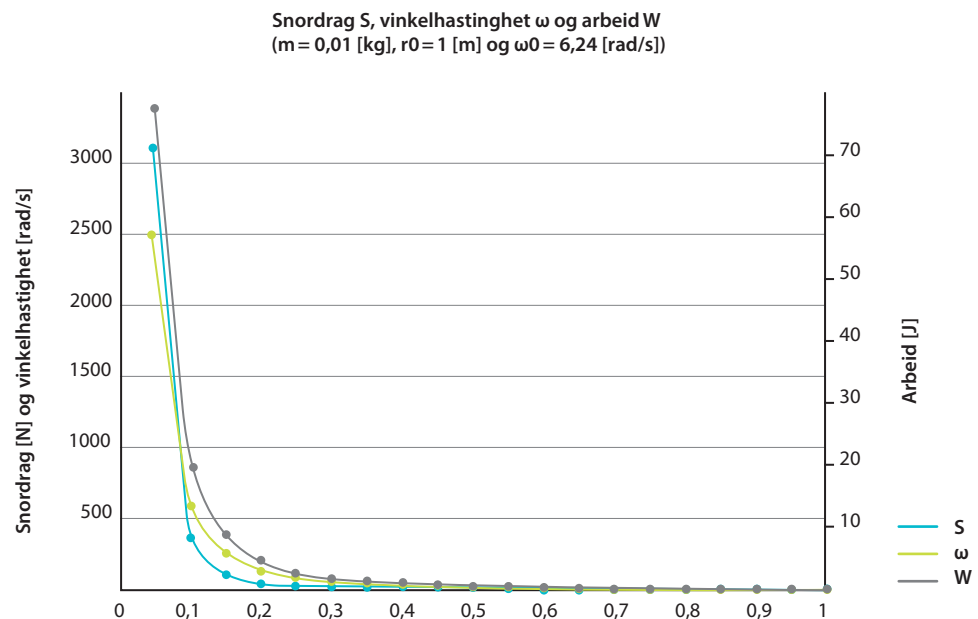
Arbeidet som utføres kan vi finne med energibetraktninger:

$$\begin{aligned} W &= E_{kin r} - E_{kin 0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0\right)^2 r^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) > 0 \quad (9.143) \end{aligned}$$

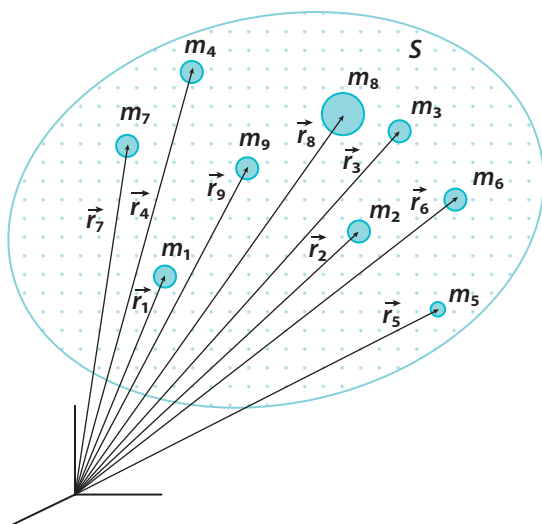
Det går selvfølgelig også an å finne arbeidet ved å gå tilbake til definisjonen (9.19):

$$W = \int_{r_0}^r \vec{S} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^r m \frac{\omega_0^2 r_0^4}{r^3} dr = m \omega_0^2 r_0^4 \int_{r_0}^r \frac{1}{r^3} dr = -\frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^4 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) \quad (9.144)$$

Det må gjøres et positivt arbeid for å dra legemet inn mot sentrum. Det koster bokstavelig talt krefter, se Figur 9.22, å nærme seg sentrum, da spinnets bevaring stritter imot.



**Figur 9.22** Snordrag  $S$ , arbeid  $W$  og vinkelhastighet  $\omega$  som funksjon av avstand til hull. Utgangsavstand  $r_0 = 1$  m og utgangsvinkelhastighet  $\omega_0 = 6,24$  rad/s. Legemets vekt er 0,01 kg



**Figur 9.23** System med ni massepunkter

Da bevegelsesmengden til det enkelte massepunkt er gitt ved  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  kan (9.146) skrives som:

$$\vec{v}_{CoM} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i = \frac{1}{M} \vec{P} \quad (9.147)$$

Hvor  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$  er systemet  $S$  sin totale bevegelsesmengde. Den totale bevegelsesmengde er den samme som om all masse var konsentrert i massesenteret og beveget seg med massesenterets hastighet. Det er jo det vi ser i dagliglivet når vi, biler, tog og annet som består av mange deler, beveger seg med kollektiv hastighet.

Dersom systemet  $S$  er isolert, vil bevegelsesmengden være konstant, Newtons første lov, og massesenteret til systemet vil bevege seg med konstant hastighet. Dersom vi innfører et koordinatsystem som beveger seg med  $\vec{v}_{CoM}$  vil massesenteret ligge i ro i dette koordinatsystemet, og den totale bevegelsesmengde i dette koordinatsystemet vil være lik null:

$$\vec{P}_{CoM} = \sum_i \vec{p}_i = 0 \quad (9.148)$$

Hva om systemet ikke var isolert fra omgivelsene? For ikke å ha for mange baller i luften bokstavelig talt, så la oss redusere vårt system  $S$  til to massepunkter massepunkter  $m_1, m_2$ .  $S$  og dets omgivelser  $S'$  er gitt i Figur 9.24.

Når vi først er i det systematiske hjørnet, kan vi jo se litt nærmere på systemer med mange massepunkter. Figur 9.23 viser et slikt system  $S$  med ni massepunkter.

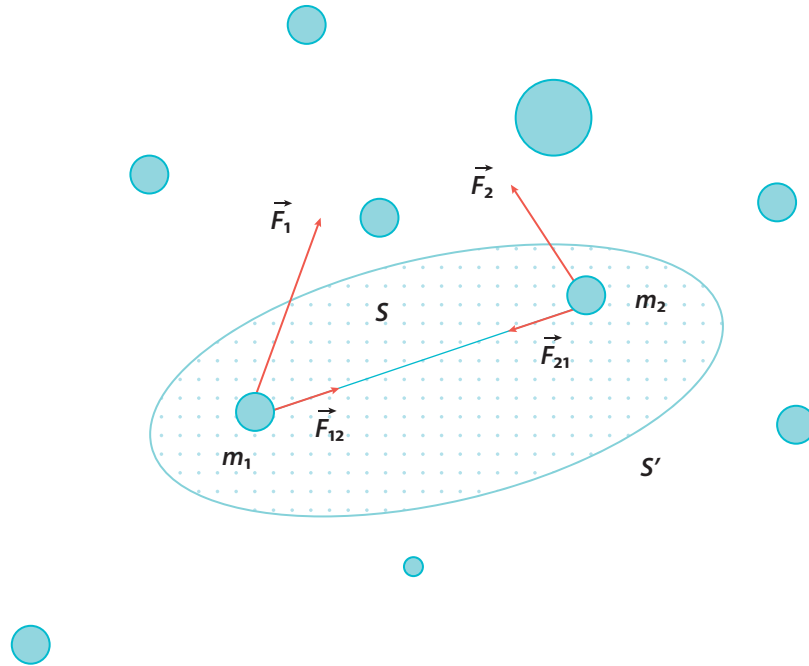
For å finne systemets massesenter har vi angitt massenes posisjoner fra et punkt utenfor som er i ro i forhold til systemet. Massesenteret (CoM «Center of Mass») er da gitt ved:

$$\vec{r}_{CoM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (9.145)$$

Her er  $M$  systemet  $S$  sin masse. Massesenterets hastighet som jo er posisjonsendring per tid, finner vi ved å derivere (9.145):

$$\vec{v}_{CoM} = \frac{d\vec{r}_{CoM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (9.146)$$





**Figur 9.24** System og omgivelser

Den totale bevegelsesmengden for systemet S i et gitt øyeblikk er:

$$\vec{P} = m_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_{12}) + m_2(\vec{v}_2 + \vec{v}_{21}) = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) + (m_1\vec{v}_{12} + m_2\vec{v}_{21}) \quad (9.149)$$

Her angir  $\vec{v}_1$  og  $\vec{v}_2$  relatert til  $\vec{F}_1$  og  $\vec{F}_2$  og  $\vec{v}_{12}$  og  $\vec{v}_{21}$  relatert til  $\vec{F}_{12}$  og  $\vec{F}_{21}$ . La oss derivere ligningen for bevegelsesmengde for å se på endringen av bevegelsesmengde:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \left( \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} \right) + \left( \frac{d(m_1\vec{v}_{12})}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_{21})}{dt} \right) \quad (9.150)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) \quad (9.151)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int} \quad (9.152)$$

Bevegelsesmengden som skyldes interne krefter i systemet S, er konstant:

$$\vec{P} = (m_1\vec{v}_{12} + m_2\vec{v}_{21}) = \text{konstant} \quad (9.153)$$

Det betyr at:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{int} = 0 \quad (9.154)$$

Summen av de indre kreftene i et system vil alltid være null, Newtons tredje lov, og endring av et systems bevegelsesmengde skyldes ytre krefter:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (9.155)$$

Vi henter så frem igjen ligningen for bevegelsesmengde:

$$\vec{P} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) + (m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{21}) = M \vec{v}_{CoM} + (m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{21}) \quad (9.156)$$

Så deriverer vi:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CoM}}{dt} = M \vec{a}_{CoM} \quad (9.157)$$

Vi har allerede funnet  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  uttrykt ved summen av alle ytre krefter:

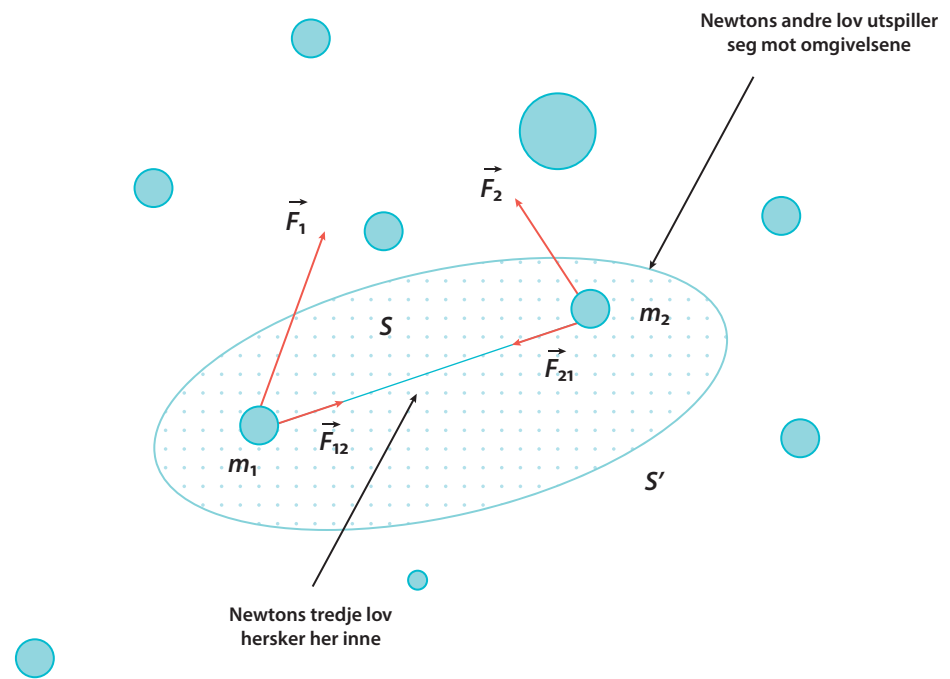
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (9.158)$$

Dette gir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CoM} \quad (9.159)$$

Vi ser at massesenteret til et system beveger seg som om det var ett massepunkt med masse  $M$  utsatt for summen av ytre krefter på systemet.

Det er disse resultatene som gjør det så hendig å dele verden opp i systemet av interesse og omgivelser, Figur 9.25. Inne i selve systemet er det indre krefter, Newtons tredje lov med krefter og motkrefter, som hersker, og i systemets samspill med omgivelsene er det Newtons andre lov,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , som gjelder. Når vi tegner frilegemediagram, så er det nettopp denne delingen av verden vi foretar.



**Figur 9.25** Deling av verden i system og omgivelser

Du husker kanskje at vi løselig definerte tyngdepunktet til å være i massesenteret? Det ser vi nå stemmer når vi har et system som er utsatt for tyngden (9.159):

$$\vec{F} = M \vec{g}_{CoM} \quad (9.160)$$



# 10

## Kapittel 10

---

# Hiv o' hoi!

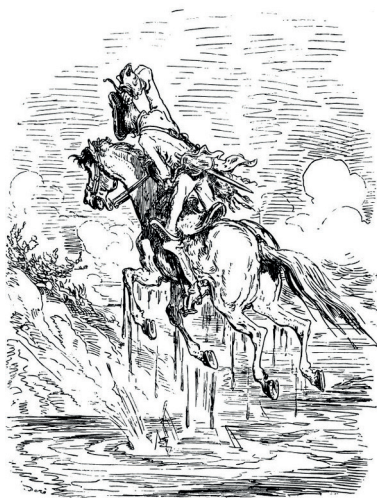
«Snart er skatten vår,  
så kan vi ta det rolig de neste hundre år.»

*Kaptein Sabeltann og skatten i Kjuttaviga, Terje Formoe (1949–)*

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Taljer, differensiell talje

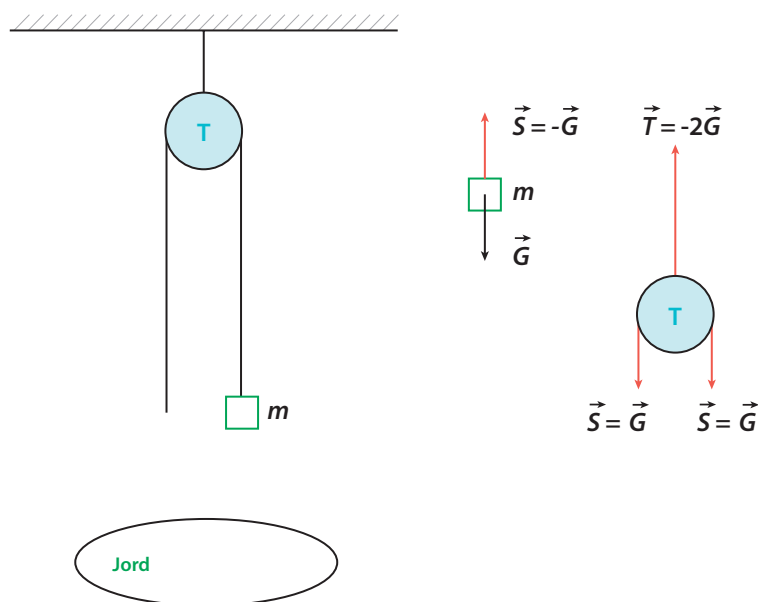
---



**Figur 10.1** Baron von Münchhausen drar seg selv og hesten opp av myren

Det har til alle tider vært kjekt å høre på skrøner og oppdiktede fortellinger. Sunniva i skuespillet «Kaptein Sabeltann og skatten i Kjuttaviga» liker å høre på sjømann Rubens kanskje ikke helt troverdige anekdoter fra de sju hav. Da jeg var liten, leste vår lærer fra boken *Baron von Münchhausens vidunderlige historier* og eventyr mens vi spiste matpakkene våre. Vi skjønnte jo at dette var oppdiktet, men moro var det lell. Jeg ble spesielt fascinert av historien hvor Baronen dro seg selv og hesten opp av myren etter håret. Selv har jeg nylig gjort noe tilsvarende i Vitensenteret i Trondheim, men der ble det brukt taljer.

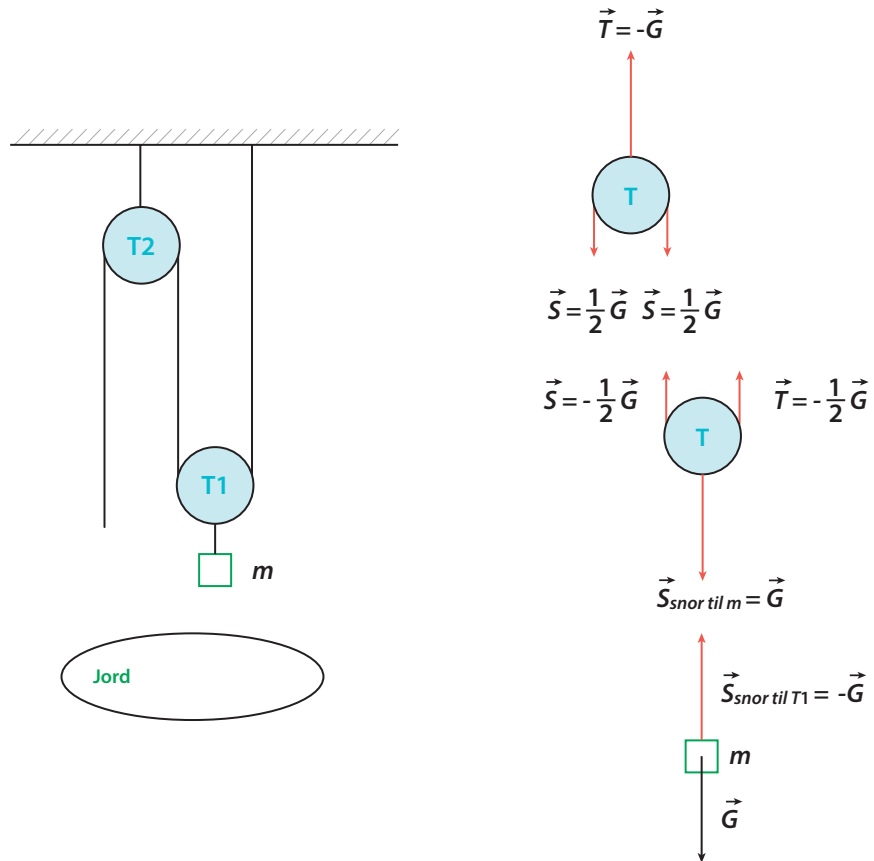
For å forstå hvordan du kan løfte deg selv og andre tunge ting ved hjelp av taljer, må vi starte litt rolig med enkle taljer. La oss begynne med en trinse som skal hjelpe oss å løfte en masse  $m$  – Figur 10.2.



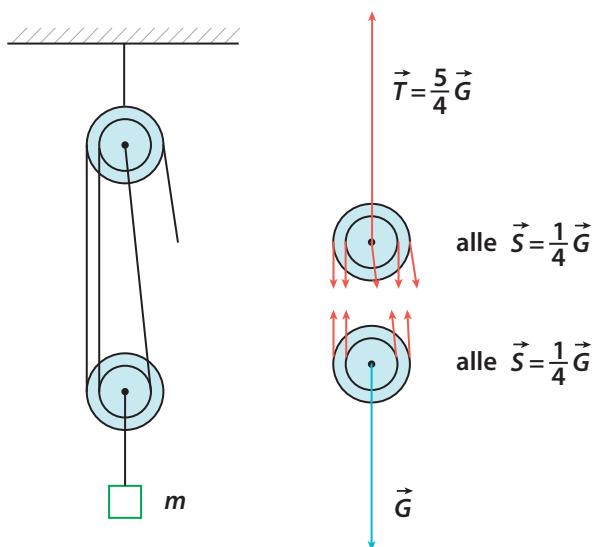
**Figur 10.2** Trinse og en masse  $m$

Til venstre ser vi trinsen som henger i taket ved hjelp av en snor, og loddet  $m$  som er festet til den andre snoren som går over trinsen. Du holder i venstre del av sistnevnte snor. Til høyre ser vi frilegemediagrammer for massen  $m$  og trinsen. Vi observerer at snordraget på taket blir dobbelt så stort som snordraget som massen  $m$  produserer. Dette arrangementet gjør det ikke lettere å løfte massen  $m$ , men en kan jo bruke sin egen tyngde når man drar.

For å få noe som gjør livet lettere, må vi ha flere trinser. Figur 10.3 viser neste steg på veien.



Figur 10.3 En enkel talje med tilhørende frilegemediagrammer

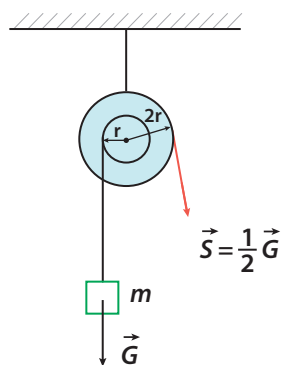


Figur 10.4 En mer kompleks talje med frilegemediagrammer til høyre

I Figur 10.3 ser vi selve taljen til venstre og med frilegemediagrammer til høyre. Vi ser at vi nå slipper unna med å dra med en kraft som er halvparten av vekten til  $m$ , men siden **arbeidet er konstant**, blir veilengden den dobbelte. For å løfte  $m$  1 meter må vi dra 2 meter snor.

Vanligvis er taljer heftigere enn som så. I Figur 10.4 ser du en talje hvor en løfter 1 meter ved å dra 4 meter snor. Utvekslingen er 4:1. Kraften en må løfte med, blir da  $\frac{1}{4}$  av  $m$  sin tyngde.

En annen måte å lage taljer på er å bruke løftearrangementer hvor snorer er viklet på hvert sitt hjul. I Figur 10.5 ser du et eksempel på det.



**Figur 10.5** En talje med snorer på ulike hjul

For å finne ut kraften vi må trekke med, setter vi opp kraftmomentligningen:

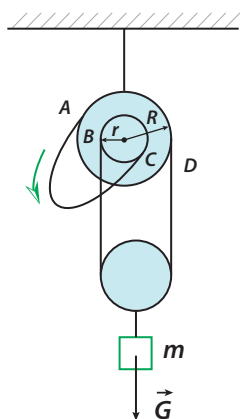
$$\sum \tau = 0 \quad (10.1)$$

$$2Sr - Gr = 0 \quad (10.2)$$

$$S = \frac{1}{2}G \quad (10.3)$$

Vi må altså dra med halve tyngden av masse  $m$ . Utvekslingen er 2:1.

Har du noen gang sett hvordan en tung motor løftes ut av en bil på et verksted? Jeg har brukt mye tid foran TV-en med å se andre jobbe på bilverksteder. De bruker en såkalt differensiell talje til å løfte ut motorer. I Figur 10.6 ser du en skisse av en slik talje.



**Figur 10.6** Differensiell talje

Her dras det i den løse enden av snoren, kjeden, ved pilen i figuren. Snoren går i spor slik at den er forhindret fra å slippe bakover på trinsehjulene. Vi har fire segmenter på taljen som vi har kalt A, B, C og D. Størrelsen på de tilhørende kreftene er  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $F_C$  og  $F_D$ .

Anta at snoren er masseløs. Da er  $F_C = 0$  siden C ikke bærer noen tyngde. Når systemet er i likevekt, er  $F_B = F_D$ , ellers ville den nedre trinsen rotere. Ser vi på den nedre trinsen, så er  $G = F_B + F_D = 2F_D$ .

På den øverste sammensatte trinsen gir kraftmomentet følgende ligning:

$$F_D R + F_C r = F_B r + F_A R \quad (10.4)$$

Her trekker  $F_D$  og  $F_C$  i samme retning, mens  $F_B$  og  $F_A$  trekker i motsatt retning. Ved å sette inn det vi har funnet ut tidligere, får vi:

$$F_D R = F_D r + F_A R \quad (10.5)$$

$$F_D = F_A \frac{R}{R-r} \quad (10.6)$$

$$\frac{G}{F_A} = \frac{2R}{R-r} = \frac{2}{1-k} \quad (10.7)$$

Forholdet i (10.8) kalles den mekaniske fordel. Er for eksempel  $R = 2r$ , blir den mekaniske fordel 4 og vi må bruke en kraft som er en fjerdedel av tyngden til masse  $m$ . Utvekslingen er 4:1, og vi må da dra 4 meter for å løfte  $m$  1 meter.



## Kapittel 11

---

# C-momenter

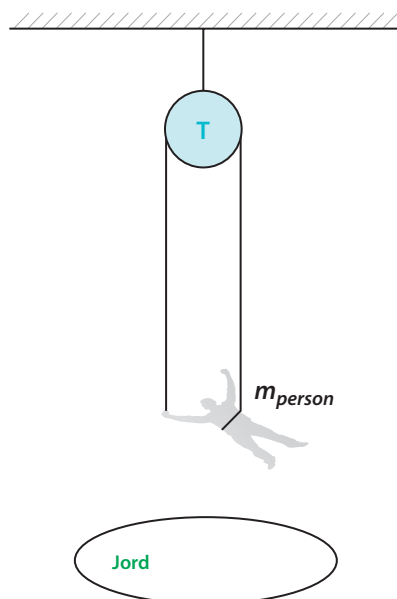
«If you quote this, you can be the first person to quote someone quoting someone quoting himself quoting someone.»

*Lost in Math: How Beauty Leads Physics Astray,*  
Sabine Hossenfelder (1976 – )

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Systemtenkning, dobbel Atwood-maskin, rullende legeme, oppgave på universitetsnivå, tau som sklir utfor bord

---



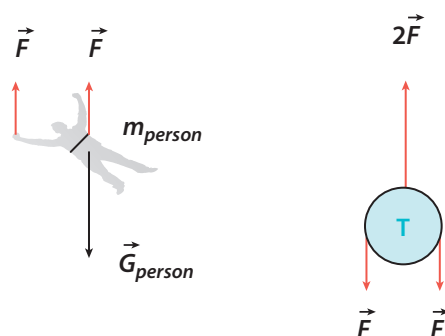
**Figur 11.1** Person som dra seg selv oppover

**C moment er per definisjon en del av en turnøvelse med stor fysisk vanskelighetsgrad. Nå skal vi gjøre vanskelige fysikkoppgaver. Dersom du ikke er helt klar for det, kan du kose deg med Sabine sine flotte fysikkvideoer på YouTube. Sabine er morsom, smart og flink til å forklare. I tillegg har hun glimt i øyet og tenker annerledes. Å se henne kan være en god start før du gyver løs.**

Kanskje vi skal prøve oss med noen C-momenter med kommentarer til? Vi kan begynne med øvelsen som pryder forsiden av boken.

Personen veier 82 kilogram og drar i tauet slik at han etter en kort tid får akselerasjonen  $0,75 \text{ m/s}^2$  oppover. Hvor stor kraft  $F$  drar personen tauet med?

Her gjelder det å tenke system og starte med å lage frilegemediagrammer for person og trinse – Figur 11.2.



**Figur 11.2** Frilegemediagrammer for person og trinse

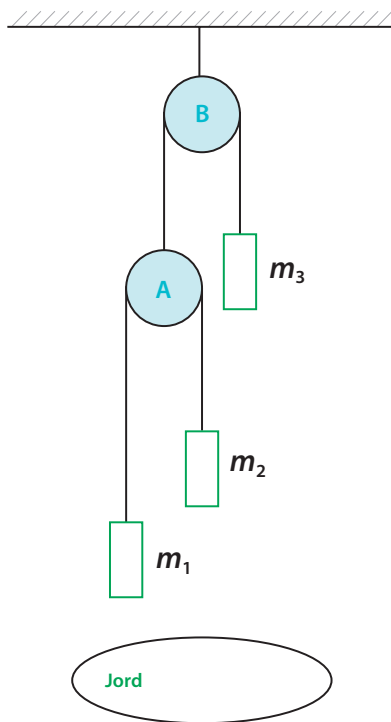
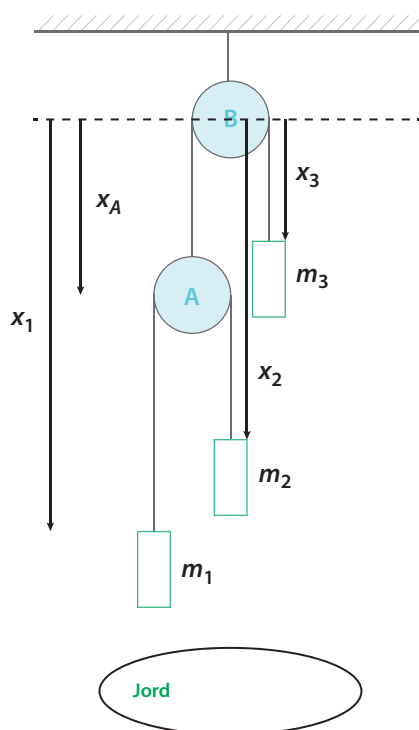
Vi ser at personens tyngde blir fordelt mellom festepunktet for tauet rundt magen og hånden som personen holder i tauet med. Personen må holde med en kraft som er lik halve tyngden bare for å være i ro. For å akselerere oppover må han øke kraften, og vi kan skrive opp følgende ligning basert på Newtons andre lov:

$$2F - m_{\text{person}}g = m_{\text{person}}a \quad (11.1)$$

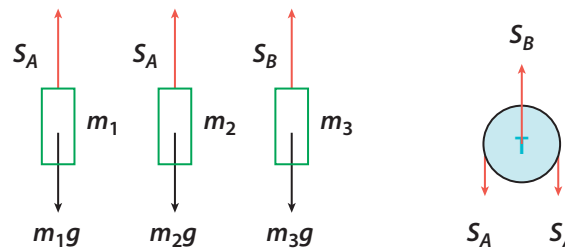
$$F = \frac{82 \text{ kg}}{2} \cdot (0,75 + 9,81) \text{ m/s}^2 = 433,0 \text{ N} \quad (11.2)$$

Vi kan benytte anledningen til å svare på en del andre ting samtidig. Snordraget vil bli det samme som  $F$ , og kraften som virker oppover på trinsen vil bli  $2F$ .

En annen populær oppgave er den doble Atwood-maskinen som er gjengitt i Figur 11.3. Anse snorer og trinser for masseløse.


**Figur 11.3** Dobbel Atwood-maskin

**Figur 11.5** Dobbel Atwood-maskin med avstander fra første trinse inntegnet

Denne maskinen gjør ikke så mye nyttig arbeid, men gir oss nye utfordringer i forståelse av fysikk. Igjen er det fornuftig å starte med å lage frilegemediagrammer – Figur 11.4.


**Figur 11.4** Frilegemediagrammer

Vi anvender så Newtons andre lov på de enkelte legemene og får:

$$m_1 g - S_A = m_1 a_1 \quad (11.3)$$

$$m_2 g - S_A = m_2 a_2 \quad (11.4)$$

$$m_3 g - S_B = m_3 a_3 \quad (11.5)$$

$$2S_A - S_B = m_A a_A = 0 \quad (11.6)$$

Årsaken til at det er null på høyresiden av siste ligning, er at trinsene er masseløse. Da har vi fire ligninger, men fem ukjente  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $S_A$  og  $S_B$ . Vi trenger en ligning til. Den finner vi ved å se på sammenhengen mellom akselerasjonene – Figur 11.5.

Nå kan vi bruke det faktum at snorene har en gitt lengde:

$$x_A + x_3 = \text{konstant} \quad (11.7)$$

Ved å derivere to ganger finner vi akselerasjon:

$$v_A + v_3 = 0 \quad (11.8)$$

$$a_A + a_3 = 0 \quad (11.9)$$

$$a_3 = -a_A \quad (11.10)$$

Dette resultatet er ikke så uventet. Når  $m_3$  går ned, vil trinsen A gå opp, og vice versa med samme, men motsatt rettet akselerasjon. La oss se på loddene som henger på trinse A.

$$(x_1 - x_A) + (x_2 - x_A) = l_2 \quad (11.11)$$

$$(a_1 - a_A) + (a_2 - a_A) = 0 \quad (11.12)$$

$$a_1 + a_2 = 2a_A = -2a_3 \quad (11.13)$$

Vi ser at gjennomsnittet  $a_1 + a_2/2$  er motsatt rettet av  $a_3$ . Da har vi fem ligninger (11.3) til (11.6) og (11.13) og fem ukjente. Vi er dermed ferdig med fysikken, og resten er ren matematikk. Etter en god del regning kom jeg frem til følgende resultat:

$$a_1 = g \frac{[4m_1 m_2 - 3m_2 m_3 + m_1 m_3]}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} \quad (11.14)$$

$$a_2 = g \frac{[4m_1 m_2 - 3m_1 m_3 + m_2 m_3]}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} \quad (11.15)$$

$$a_3 = g \frac{[-4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3]}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} \quad (11.16)$$

$$S_B = g \frac{8m_1 m_2 m_3}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} \quad (11.17)$$

$$S_A = \frac{1}{2} S_B \quad (11.18)$$

I et ledig øyeblikk kan du jo «more» deg med denne gymnastiske matematiske øvelsen, men la ikke formler drukne gleden med fysikk. Vi kan jo sjekke for spesialtilfellet  $m_1 = m, m_2 = m$  og  $m_3 = 2m$ , for å se at vi ikke er helt på viddene:

$$a_1 = g \frac{[4m \cdot m - 3m \cdot 2m + m \cdot 2m]}{m \cdot 2m + m \cdot 2m + 4m \cdot m} = 0 \quad (11.19)$$

$$a_2 = g \frac{[4m \cdot m - 3m \cdot 2m + m \cdot 2m]}{m \cdot 2m + m \cdot 2m + 4m \cdot m} = 0 \quad (11.20)$$

$$a_3 = g \frac{[-4m \cdot m + m \cdot 2m + m \cdot 2m]}{m \cdot 2m + m \cdot 2m + 4m \cdot m} = 0 \quad (11.21)$$

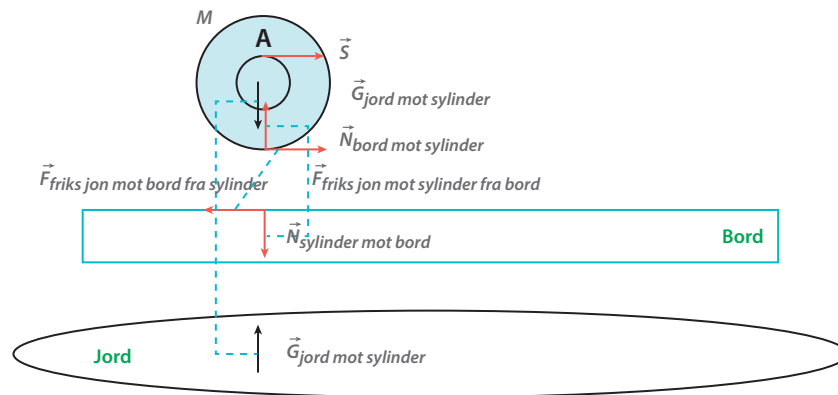
$$S_B = g \frac{8m \cdot m \cdot 2m}{m \cdot 2m + m \cdot 2m + 4m \cdot m} = 2mg \quad (11.22)$$

$$S_A = \frac{1}{2} S_B = mg \quad (11.23)$$

Som forventet. Ingen akselerasjoner, og snordragene er dermed bestemt av tyngden alene.

Neste oppgave vi skal se på, er hentet fra et mekanikk-kurs på et universitet (Prøveeksamen i FY-ME 100 – Mekanikk våren 2002. UiO). Er det mulig med den kunnskapen vi har opparbeidet så langt, å løse den? Vel, la oss prøve.

En massiv, homogen sylinder har masse  $M$  og radius  $R$ . En snor er viklet rundt en tynn sirkulær kant (masseløs) med radius  $r$ . Vi drar i snoren med en konstant horisontal kraft  $S$ , og sylinderen ruller uten å gli på et bord. Se Figur 11.6.



**Figur 11.6** Sylinder som ruller på et bord

I Figur 11.6 har vi gått litt omstendelig til verks og tegnet inn alle krefter, da vi ikke har sett på rullende sylindrer før. Vi ser at friksjonen virker motsatt vei enn det den gjorde for klosser. Friksjonen hjelper sylinderen å få fraspark. Tyngden og normalkraften «nuller» hverandre ut, slik at vi kun har krefter i horisontalplanet.

a) Vis at sylinderens massesenter ( $m_s$ ) får akselerasjonen

$$a_{ms} = \frac{2(r+R)}{3MR} S \quad (11.24)$$

Kraftmomentet om massesenteret gir:

$$Sr - F_{friksjon} R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a_{ms}}{R} \quad (11.25)$$

Verdien av  $I = \frac{1}{2}MR^2$  for en sylinder fant vi i (8.19). Fra Newtons andre lov har vi:

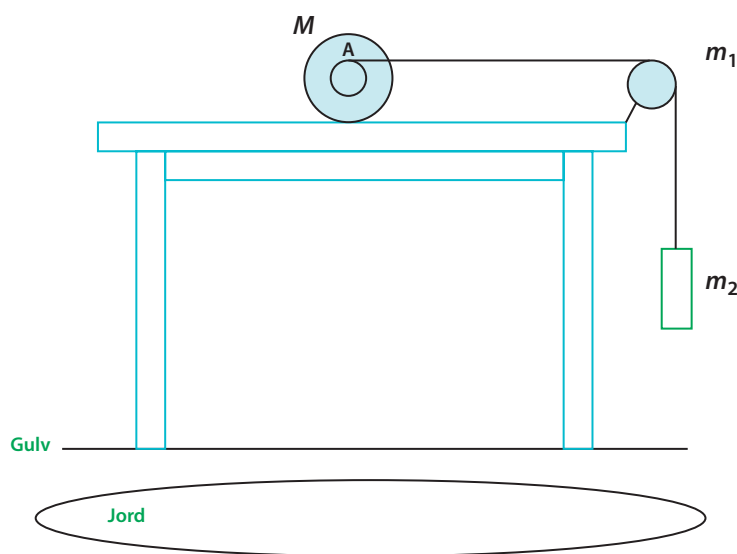
$$S + F_{friksjon} = Ma_{ms} \quad (11.26)$$

Legger vi sammen (11.25) og (11.26), får vi:

$$S\left(\frac{r}{R} + 1\right) = \frac{3}{2}M a_{ms} \quad (11.27)$$

$$a_{ms} = \frac{2(r+R)}{3MR} S \quad (11.28)$$

Snoren festes så om en sylinderformet trinse med masse  $m_1$  og radius  $r$  til en kloss med masse  $m_2$ , som vist på Figur 11.7. Trinsen er friksjonsløs, og snoren er masseløs. Systemet beveger seg slik at  $m_2$  akselereres nedover og sylinderen ruller uten å gli mot høyre. Snoren glipper ikke mot trinsen.



**Figur 11.7** Vårt system

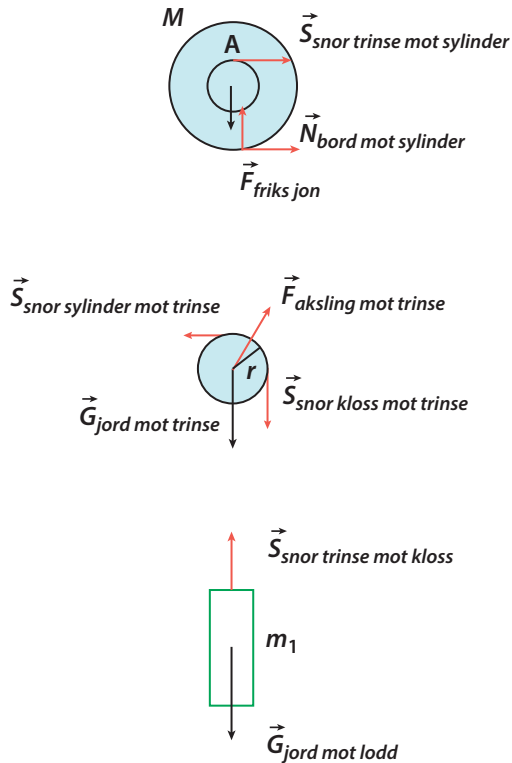
Det kan være instruktivt å tegne frilegemediagrammer før vi blir bedt om å gjøre noe som helst annet – Figur 11.8.

b) Bestem akselerasjonen  $a$  til klossen uttrykt ved akselerasjonen  $a_{ms}$ .

Akselerasjonen til klossen er den samme som akselerasjonen til punkt A på Figur 11.7 hvor snoren forlater kanten:

$$a = a_{ms} + r\alpha = a_{ms} + r\frac{a_{ms}}{R} = \left(1 + \frac{r}{R}\right)a_{ms} \quad (11.29)$$

Punktet A akselererer altså raskere enn massesenteret siden det får en ekstra akselerasjon på grunn av den akselererende roterende bevegelsen som har sin årsak i at massesenteret akselererer.



**Figur 11.8** Frilegemediagrammer

c) Finn snordraget i den horisontale og den vertikale delen av snoren.

Vi vet at  $S_{\text{snor kloss mot trinse}} = S_{\text{snor trinse mot kloss}}$  og  $S_{\text{snor kloss mot trinse}} = S_{\text{snor trinse mot kloss}}$  siden snoren er masseløs, og for letthets skyld kaller vi de to snordragene for  $S_h$  for horisontal og  $S_v$  for vertikal.

Kraftmomentet på trinsen gir:

$$(S_v - S_h)r = I\alpha = \frac{1}{2}m_1r^2\left(\frac{a}{r}\right) \quad (11.30)$$

Hvor  $a$  er klossens akselerasjon. Den finnes ved å bruke Newtons andre lov på klossen:

$$m_2g - S_v = m_2a \quad (11.31)$$

Fra (11.30) og (11.31) følger:

$$S_h = m_2g - \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)a \quad (11.32)$$

$$S_h = m_2g - \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)a_{ms} \quad (11.33)$$

I siste ligning brukte vi resultatet fra (11.29). Ved hjelp av (11.28) får vi med litt regning:

$$S_h = \frac{m_2g}{1 + \frac{m_1 + 2m_2}{3M}\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} \quad (11.34)$$

Ved å sette inn for  $S_h$  og bruke (11.30) og (11.31) får en for det vertikale snordraget:

$$S_v = \frac{m_2}{m_1 + 2m_2} (m_1g + 2S_h) \quad (11.35)$$

$$S_v = \frac{m_2g}{m_1 + 2m_2} \left( m_1 + \frac{2m_2}{1 + \frac{m_1 + 2m_2}{3M}\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} \right) \quad (11.36)$$

Dette ble et ganske komplisert uttrykk. For å se om det er fornuftig, kan en sette massen til trinsen  $m_1 = 0$ , og da blir  $S_v = S_h$  som forventet.

d) Hva blir sylinderens kinetiske energi etter at klossen har beveget seg nedover en avstand  $s$  fra å være i ro?

Vi kan skrive følgende generelle uttrykk for sylinderens energi:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{ms}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_{ms}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{ms}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv_{ms}^2 \quad (11.37)$$

Siden  $a = (1 + \frac{r}{R})a_{ms}$  som vi fant i (11.29), må det være samme type relasjon mellom fart:

$$v = \left(1 + \frac{r}{R}\right)v_{ms} \quad (11.38)$$

Akselerasjon er jo hastighetsendring på tid, og ved å derivere uttrykket i (11.38) får vi (11.29).

Da akselerasjonen  $a$  er konstant og  $v_0 = 0$  og  $s_0 = 0$ , har en de vanlige kinematiske ligningene vi så i kapittelet «Historisk sett» (4.4), og farten blir:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad (11.39)$$

$$v = at \quad (11.40)$$

$$v = \sqrt{2as} \quad (11.41)$$

Vi kan så regne videre:

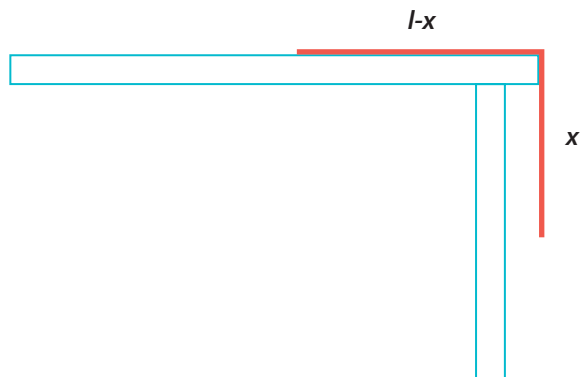
$$E_k = \frac{3}{4}M\left(\frac{v}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)}\right)^2 = \frac{3}{2}Mas\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2} \quad (11.42)$$

Fra (11.32) kan vi finne et uttrykk for akselerasjonen:

$$a = \frac{2}{m_1 + 2m_2}(m_2g - S_h) \quad (11.43)$$

Ved å sette inn for  $S_h$  (X.34) finner en med «litt» mellomregning:

$$E_k = \frac{3Mm_2gs}{m_1 + 2m_2}\left(1 + \frac{1}{1 + \frac{m_1 + 2m_2}{3M}\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2} \quad (11.44)$$



Det ble litt grisete mellomregninger i den siste oppgaven i dette kapittelet, og uttrykket for  $E_k$  ville jeg nok ha lurt på om var riktig dersom jeg hadde utledet det på eksamen. Trøsten får være at selve fysikken i denne oppgaven er rimelig overkommelig.

Da er det kanskje på tide å prøve seg på det jeg aldri klarte – tau som sklir utenfor bord. Et homogent tau med lengde  $l$  henger ut over et bord som vist i Figur 11.9.

Figur 11.9 Tau som sklir av bord



Siden vi har et homogent tau med totalmasse si  $m$ , kan ligningene vi pleier å skrive, Newtons andre lov, uttrykkes på følgende måte for tauet som ligger på bordet og det som er falt på utsiden:

$$S = m \frac{l-x}{l} a \quad (11.45)$$

$$G - S = m \frac{x}{l} g \quad (11.46)$$

Ved å eliminere snordraget får en følgende ligning:

$$m \frac{x}{l} a + m \frac{l-x}{l} a = m \frac{x}{l} g \quad (11.47)$$

Denne ligningen kan forkortes til:

$$a = \frac{x}{l} g \quad (11.48)$$

Vi ser at akselerasjonen vil øke jo mer tau som kommer utenfor kanten. Det virker jo rimelig. Men hvordan skal vi finne  $x(t)$ ? Akselerasjon er jo forandring av hastighet som igjen er forandring av posisjon. Altså er  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , og (11.48) tar formen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l} x \quad (11.49)$$

Dette er en andre ordens differensialligning. For å løse den multipliserer vi med  $v = dx/dt$  og får

$$v \frac{dv}{dt} = \frac{g}{l} x \frac{dx}{dt} \quad (11.50)$$

Integrasjon med begynnelsesbetingelsene  $x(0) = l_0$  og  $v(0) = 0$  gir

$$v^2 = \frac{g}{l} (x^2 - l_0^2) \quad (11.51)$$

Ved å bruke at  $v = dx/dt$  kan denne ligningen skrives

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2 - l_0^2} \quad (11.52)$$

som gir

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - l_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt \quad (11.53)$$

eller

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - l_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (11.54)$$

Dette integralet kan slås opp i en integrasjonstabell eller finnes ved hjelp av et integrasjonsprogram og kan skrives

$$\cosh^{-1}\left(\frac{x}{l_0}\right) = \sqrt{\frac{g}{l}}(t + t_0) \quad (11.55)$$

Der  $t_0$  er en integrasjonskonstant. Dette gir posisjonen som funksjon av tiden

$$x = l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}(t + t_0)\right) \quad (11.56)$$

Med begynnelsesbetingelsen  $x(0) = l_0$  fås  $t_0 = 0$ . Dermed har vi

$$x = l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \quad (11.57)$$

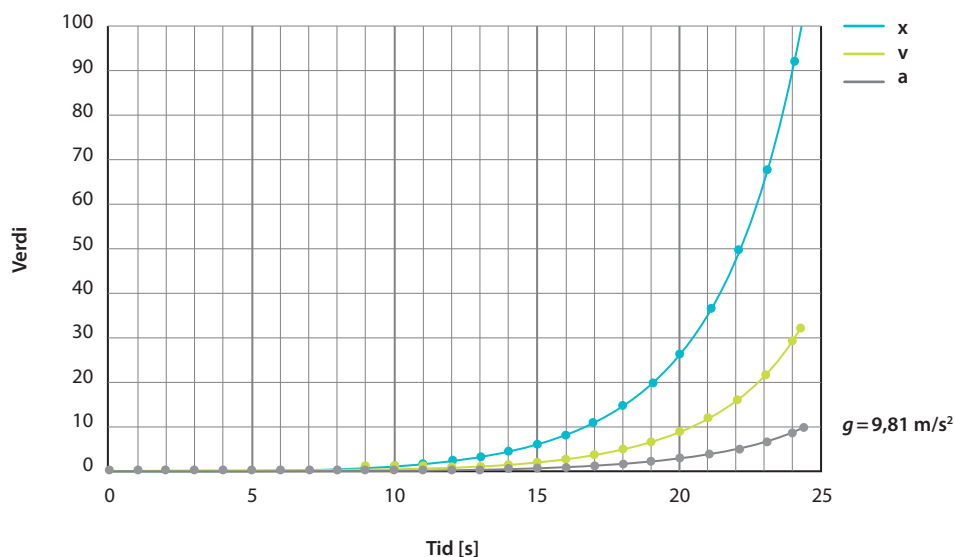
Farten finner en ved å derivere

$$v = l_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \quad (11.58)$$

og akselerasjonen ved å derivere enda en gang

$$a = \frac{l_0}{l} g \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) = \frac{g}{l} x \quad (11.59)$$

Ikke overraskende, er akselerasjonen lik det som var utgangspunktet for differensialligningen.



**Figur 11.10** Posisjon  $x$ , fart  $v$  og akselerasjon  $a$  for et tau som sklir av bord

Figur 11.10 viser posisjon  $x$ , fart  $v$  og akselerasjon  $a$  for et tau som er 100 meter langt, høyt bord med andre ord, og med 0,1 meter stump som stikker utenfor bordet ved start.

OBS! Formlene gjelder bare til hele tauet er utfor bordet. Vi ser av Figur 11.10 at akselerasjonen nærmer seg den for fritt fall,  $9,81 \text{ m/s}^2$ , jo mindre tau det er igjen på bordet. Etter at tauet har forlatt bordet, vil akselerasjonen bli konstant lik  $g$ . Resten av turen mot gulvet kan beregnes med  $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ ,  $v = v_0 + g t$ . Her representerer  $t$  tiden som har gått etter at hele tauet var utenfor,  $a = g$ ,  $v_0 = 31,3 \text{ m/s}$  farten når  $a = g$  og  $x_0 = 100 \text{ m}$  når  $a = g$ .

Jeg foreslår at vi slutter våre C-momenter her. Vi har klart å komme fra relativt enkle snordragsoppgaver til ganske avanserte og lært en god del fysikk underveis.



# 12

## Kapittel 12

---

# Alle hjelpemidler tillatt

«Menneskehjernen er fantastisk.  
Den fungerer 24 timer i døgnet fra den dagen vi blir født,  
og stopper bare når vi har eksamen.»

Ukjent

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Mestre eksamensoppgaver, skråplan, sirkelbevegelse, fjær, ballistisk pendel, uelastisk støt, Hookes lov, fjærens potensielle energi og fjæren som harmonisk oscillator

---



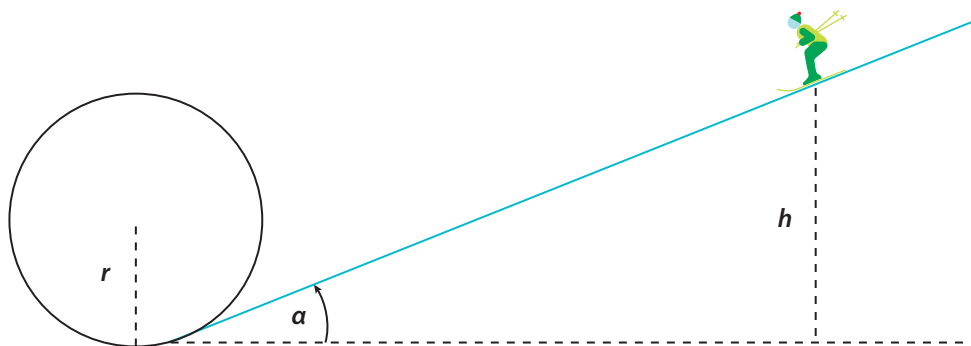
Det høres så besnærende ut. Til høyre for meg en stabel med pensumbøker og rett foran eksamensoppgaveteksten. Skulle det dukke opp noe nytt og ukjent underveis, er det bare å bla opp, finne den rette formel og trylle frem det riktige svar. Det er bare én hake. Fysikk krever forståelse, og det er vanskelig å skaffe seg under press i løpet av noen få avgjørende timer. Moralen blir derfor å regne eksamensoppgaver i god tid før eksamen, slik at huller i kunnskap eller ferdigheter kan avdekkes og repareres.

La oss starte med en oppgave hentet fra den videregående skole.

### Oppgaven handler om krefter og bevegelse

Bildet viser den svenske fristilskjørereren Jesper Tjäder i et rekordforsøk fra 2016 på å fullføre en loop.

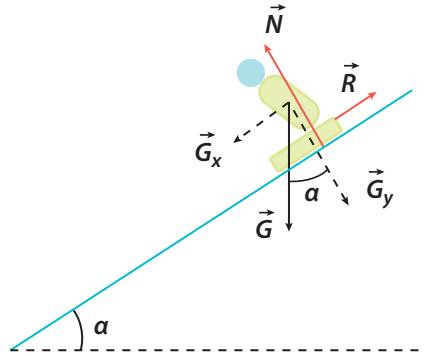
Vi lager en modell av forsøket der kjørereren glir ned et skråplan som går over i en Sirkelformet, vertikal loop. Friksjonstallet mellom skiene og skråplanet er 0,040, og skråplanvinkelen er  $\alpha = 20^\circ$ . Massen til kjører og ski er 80 kg. Radius i loopen er  $r = 2,5 \text{ m}$ . Vi ser bort fra friksjon i loopen.



Kjørereren starter fra ro i en høyde  $h = 7,0 \text{ m}$  over laveste punkt i loopen.

- Regn ut akselerasjonen når kjørereren er på vei ned skråplanet, og finn farten i bunnen av loopen.
- Tegn en figur som viser kreftene på kjørereren i bunnen av loopen, og regn ut størrelsen på dem.
- Undersøk om kjørereren greier å gjennomføre loopen.

Vi starter slik som vi alltid gjør med å tegne et frilegemediagram. Denne gang for skikjørereren. Vi har også tatt med skråplanet for lettere å se vinkelen som er involvert.



**Figur 12.1** Frilegemediagram for skikjører

Vi ser at kreftene som virker på skikjøreren er tyngdekraften, normalkraften og friksjonskraften. Vi har dekomponert tyngdekraften i en komponent langs bakken og en normalt på bakken. Vi har at  $\vec{G}_y = -\vec{N}$ . Friksjonskraften er gitt av  $R = \mu N = \mu G_y = \mu mg \cos(\alpha)$ . Det er tyngdekraftens parallelkomponent minus friksjonen som gir skikjøreren akselerasjon ned bakken.

$$\sum F = ma \quad (12.1)$$

$$G_x - R = ma \quad (12.2)$$

$$a = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu mg \cos(\alpha)}{m} = g(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)) =$$

$$(9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (\sin(20^\circ) - 0,04 \cos(20^\circ)) = 2,986 \text{ m/s}^2 \approx 3,0 \text{ m/s}^2 \quad (12.3)$$

Hvor lang er bakken? Vi vet at høyden over bunnen av loopen er  $h = 7,0 \text{ m}$ . Da er det bare å finne frem sinus:

$$s = \frac{7,0 \text{ m}}{\sin(20^\circ)} = 20,47 \text{ m} \quad (12.4)$$

Vi kan bruke sammenhengen mellom akselerasjon  $a$  og tilbakelagt strekning  $s$  for å finne tiden det tar å nå bunnen av bakken:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad (12.5)$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad (12.6)$$

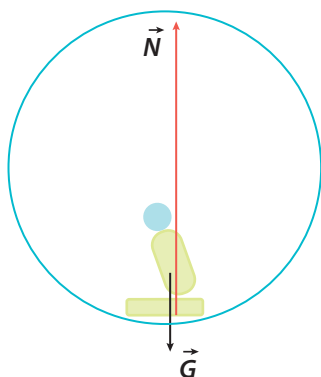
Nå var det ikke tiden vi ble spurt om, men farten. Vi kan da bruke sammenhengen mellom fart og akselerasjon:

$$v = at \quad (12.7)$$

Ved å sette (12.7) inn i (12.6) finner vi:

$$\frac{v}{a} = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad (12.8)$$

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot (2,986 \text{ m/s}^2) \cdot (20,47 \text{ m})} = 11,06 \text{ m/s} \approx 11 \text{ m/s} \quad (12.9)$$



**Figur 12.2** Frilegemediagram for skikjører i bunnen av loopen

Alternativt kunne vi ha brukt energibetraktninger for å finne  $v$ .  $1/2 mv^2 = mah$  og  $v = \sqrt{2ah}$ . Dermed er vi ferdig med a) og klar for neste deloppgave b). Vi blir først bedt om å tegne en figur som viser kreftene på kjøreren, frilegemediagram, i bunnen av loopen. Figur 12.2 viser frilegemediagrammet, hvor også loopen er tatt med bare for å vise hvor skikjøreren er.

Vi ser at det virker to krefter på skikjøreren, nemlig tyngdekraften og normalkraften. Normalkraften er i dette tilfellet større enn tyngdekraften fordi skikjøreren går inn i en sirkelbevegelse. Tyngdekraftens størrelse er:

$$G = mg = (80 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) = 784,8 \text{ N} \approx 0,78 \text{ kN} \quad (12.10)$$

Newtons andre lov og sentripetalakselerasjon gir et uttrykk for normalkraften:

$$\sum F = ma \quad (12.11)$$

$$N - G = ma = \frac{mv^2}{r} \quad (12.12)$$

$$N = \frac{mv^2}{r} + G = \frac{(80 \text{ kg}) \cdot (11,06 \text{ m/s})^2}{2,5 \text{ m}} + 784,8 \text{ N} = 4696 \text{ N} \approx 4,7 \text{ kN} \quad (12.13)$$

Oi, det var stor normalkraft. Vår venn på 80 kg opplever en akselerasjon i bunnen av bakken på  $58,7 \text{ m/s}^2 = 6,0 G$ . Dersom du ser nøye på loopen til Jens Tjäder, så er den ikke sirkelrund, og på den måten utsettes han ikke for stor  $g$ -belastning i bunnen av loopen. Så er det bare oppgave c) igjen. Klarer skikjøreren å gjennomføre loopen? Hva vil kriteriet være: ingen fart på toppen eller ingen normalkraft? Jeg heller til det siste. For å klare å gjennomføre loopen må det være en normalkraft, større eller lik null, som presser skikjøreren rundt.

Hvilken fart har en i tilfellet hvor  $N = 0$ ? La oss bruke (12.12), men nå med motsatt fortegn på  $G$  siden tyngden peker mot loopens sentrum, for å regne ut minimum fart.

$$N + G = \frac{mv^2}{r} \quad (12.14)$$

$$0 + G = \frac{mv_{min}^2}{r} \quad (12.15)$$

$$v_{min} = \sqrt{gr} = \sqrt{(9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (2,5 \text{ m})} \approx 4,95 \text{ m/s} \quad (12.17)$$



Vi vet at vår skikjører har en fart i bunnen av bakken på 11,06 m/s. Vi kan bruke loven om energibevaring for å finne farten i toppen av bakken:

$$\frac{1}{2} m v_{bunn}^2 = \frac{1}{2} m v_{topp}^2 + 2mgr \quad (12.18)$$

$$v_{topp} = \sqrt{v_{bunn}^2 - 4gr} \quad (12.19)$$

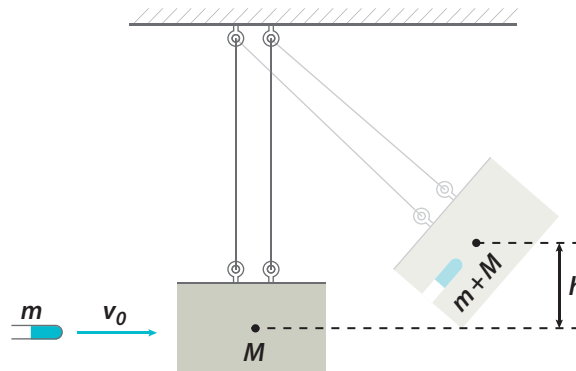
$$v_{topp} = \sqrt{(11,06 \text{ m/s})^2 - 4 \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (2,5 \text{ m})} \approx 4,91 \text{ m/s} \quad (12.20)$$

Så synd. Vår skiløper mangler kun 0,04 m/s ekstra for å klare loopen.

Hva med noen oppgaver på høyskolenivå?

### Første oppgave handler om ballistisk pendel og uelastisk støt

En ballistisk pendel er en innretning vi bruker til å måle farten til et prosjektil. Prosjektilet blir skutt horisontalt inn i en kloss som så kan svinge ut til siden, se figur i oppgaven. Høyden  $h$  er den maksimale høyden klossen får i forhold til startposisjonen.



- Vis at prosjektillets fart kan beregnes etter formelen  $v_0 = \left(\frac{m+M}{m}\right) \sqrt{2gh}$
- Vis at den brøkdelen kinetisk energi som går tapt i kollisjonen mellom prosjektil og kloss er lik  $\frac{M}{m+M}$

Vi har tidligere vært borti fullstendig elastisk støt. Dette er jo det stikk motsatte, nemlig fullstendig uelastisk støt. La oss bruke loven om bevaring av bevegelsesmengde og se hvor langt vi kommer. Vi var jo borte i en støtsituasjon i kapittelet «**Vel bevart**» ligning (9.20). La oss prøve noe tilsvarende:

$$m v_{kule 0} + M v_{kloss 0} = m v_{kule 1} + M v_{kloss 1} \quad (12.21)$$

Klossens fart før støtet var 0, og etter støtet har kloss og kule samme fart:

$$m v_{kule\ 0} = (m + M) v_{kule\ og\ kloss\ 1} \quad (12.22)$$

Vi har fått vite at kloss og kule løftes til en høyde  $h$ . Da kan vi bruke bevaringsloven for energi og skrive:

$$\frac{1}{2}(m + M) v_{kule\ og\ kloss\ 1}^2 = (m + M)gh \quad (12.23)$$

$$v_{kule\ og\ kloss\ 1} = \sqrt{2gh} \quad (12.24)$$

Så kan vi bruke det vi fant i (12.22):

$$\frac{m v_{kule\ 0}}{(m + M)} = \sqrt{2gh} \quad (12.25)$$

$$v_{kule\ 0} = \frac{(m + M)}{m} \sqrt{2gh} \quad (12.26)$$

Som du ser, klarte vi oss bare med bevaringsloven fordi vi var så «heldige» at støtet var fullstendig uelastisk da kule og kloss slo følge etter støtet. Da er vi ferdig med a) og klare for b). Hvor mye energi ble tapt? Det kan vi finne ved å finne kinetisk energi like før og etter støtet. Før:

$$\frac{1}{2} m v_{kule\ 0}^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{(m + M)}{m} \right)^2 2gh \quad (12.27)$$

Etter:

$$\frac{1}{2} (m + M) v_{kule\ og\ kloss\ 1}^2 = \frac{1}{2} (m + M) 2gh \quad (12.28)$$

Vi skulle finne brøkdelen av energi som går tapt til varme, så da er det bare å dele «etter» på «før» og trekke det fra 1:

$$1 - \frac{\frac{1}{2} (m + M) 2gh}{\frac{1}{2} m \left( \frac{(m + M)}{m} \right)^2 2gh} = 1 - \frac{m}{(m + M)} = \frac{(m + M) - m}{(m + M)} = \frac{M}{(m + M)} \quad (12.29)$$

Med dette har vi altså undersøkt fullstendig elastisk støt i «**Vel bevart**» (9.32) og (9.33) hvor vi brukte kravet om energibevaring i tillegg til bevaring av bevegelsesmengde til å finne hastighetene, og her det fullstendig uelastiske støtet hvor vi slapp unna med bare å bruke bevaring av bevegelsesmengde. Alle andre typer støt ligger mellom disse to ytterlighetene.

**Neste oppgave handler om krefter og bevegelse**

Systemet bestående av en fjær, to klosser og en trinse – som vist på figuren – startes fra stillestående når fjæren er i sin likevektslengde. Følgende parametere er gitt:

$$m_1 = 0,50 \text{ kg},$$

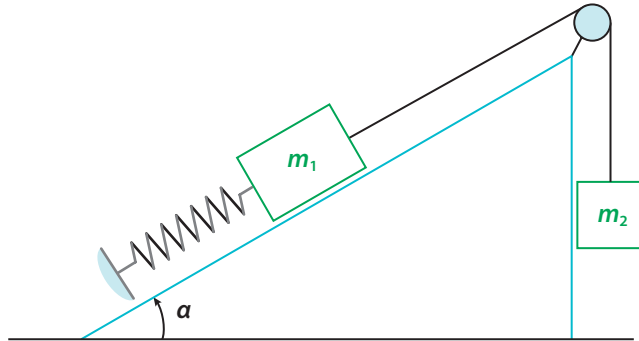
$$m_2 = 1,0 \text{ kg},$$

$$I = 0,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$r = 0,15 \text{ m},$$

$$k = 50 \text{ N/m},$$

$$\alpha = 30^\circ.$$



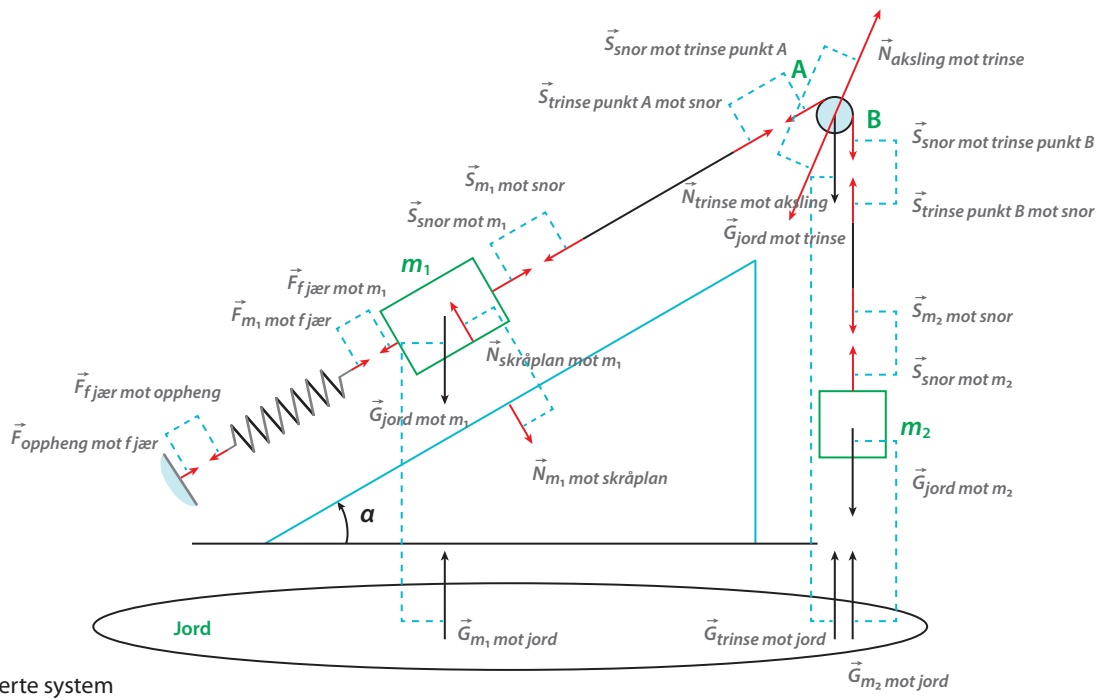
Her er  $r$  trinsens radius,  $I$  trinsens treghetsmoment og  $k$  er fjærkonstanten. Anta at snorene er masseløse, fjæren er ideell, klossen med masse glir friksjonsfritt på skråplanet, trinsen har en friksjonsfri aksling og at det ikke er noe luftmotstand. Fjæren har et fast oppheng i nedre ende. Friksjonskraften mellom snoren og trinsen er stor nok til at snoren ikke glir på trinsen.

- Tegn frilegemediagram for
  - Fjæren
  - Klossen med masse  $m_1$
  - Trinsen
  - Klossen med masse  $m_2$
- Hvilke krefter fra disse frilegemediagrammene er kraft/motkraft-par?
- Finn klossenens lineære akselerasjon og trinsens vinkelakselerasjon like etter at systemet slippes fri.
- På grunn av fjæren vil systemet ende opp med å svinge frem og tilbake rundt en likevektposisjon. Hvor mye er fjæren forlenget når systemet er i denne likevektposisjonen?

Oppgaven inneholder et element, fjær, som vi ikke har vært borti før, men la oss ikke bekymre oss om det i første omgang. Vi blir bedt om å lage frilegemediagrammer i a) og å finne kraft/motkraft-par i b). La oss starte med b), for da blir det mye enklere å gjøre a) etterpå.

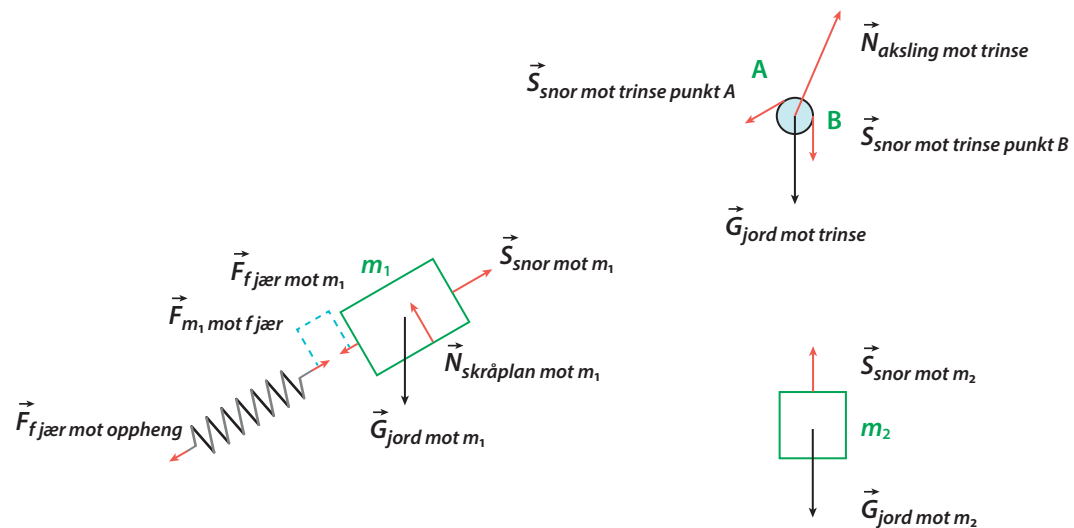
- Hvilke krefter fra disse frilegemediagrammene er kraft/motkraft-par?

Da er det bare å ta Newtons tredje lov i bruk og tegne alle krefter og motkrefter som vist i Figur 12.3. Vi har latt klosser, trinse og fjær «sveve» litt i luften slik at det er lettere å se kraft/motkraft-parene og enklere å tegne frilegemediagrammer etterpå. Kraft/motkraftpar er vist med stiplede linjer mellom seg.



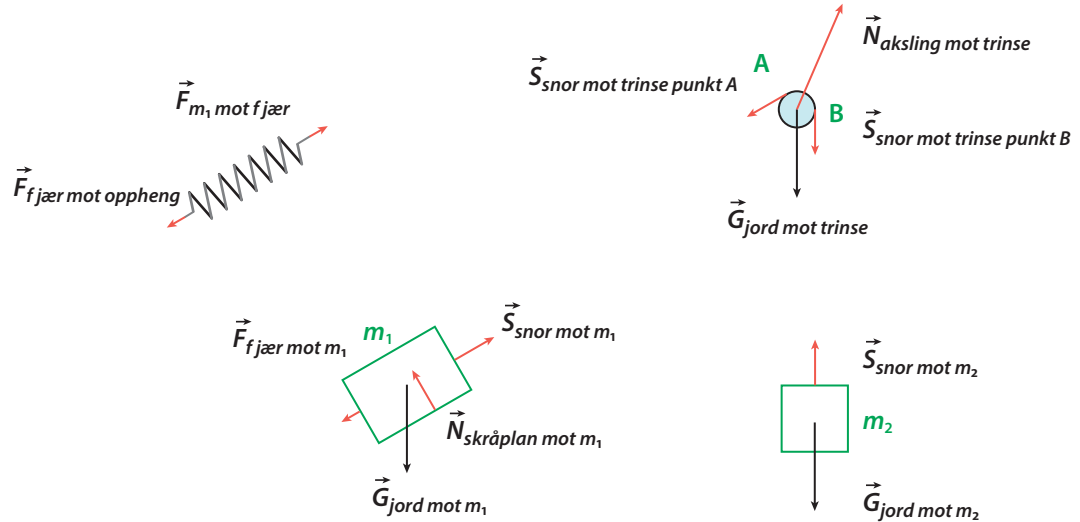
**Figur 12.3** Vårt isolerte system med kraft/motkraft-par

Vi blir bedt om å finne kraft/motkraft-par mellom de fire legemene fjær, kloss  $m_1$ , trinse og kloss  $m_2$ . For å se det lettere fjerner vi alt som ikke har med de fire legemene å gjøre. Se Figur 12.4.



**Figur 12.4** Kraftpar mellom de fire legemene

Vi ser at vi sitter igjen med kun ett kraft/motkraft-par, og det er kraften mellom kloss  $m_1$  og fjær. Dermed har vi svart på oppgave b). Svar på oppgave a) er også vist i Figur 12.4, men i Figur 12.5 er det bare «ryddet» litt opp.



**Figur 12.5** Frilegemediagrammer

Så er det oppgave c).

- c) Finn klossenes lineære akselerasjon og trinsens vinkelakselerasjon like etter at systemet slippes fri.

Vi må bruke Newtons andre lov for de to klossene og kraftmomentet for trinsen og sette opp bevegelsesligninger:

For kloss  $m_1$  har vi:

$$F_{fjær mot m_1} - m_1 g \sin(\alpha) + S_{snor mot m_1} = m_1 a \quad (12.30)$$

For trinse:

$$S_{snor mot trinse punkt B} r - S_{snor mot trinse punkt A} r = I \frac{a}{r} \quad (12.31)$$

For kloss  $m_2$  har vi:

$$m_2 g - S_{snor mot m_2} = m_2 a \quad (12.32)$$

I tillegg vet vi at:

$$S_{\text{snor mot trinse punkt A}} = S_{\text{snor mot } m_1} \quad (12.33)$$

$$S_{\text{snor mot trinse punkt B}} = S_{\text{snor mot } m_2} \quad (12.34)$$

Den ene kraften vi ikke har helt kontroll på, er fjærkraften  $F_{\text{fjær mot } m_1}$ . Hvordan ser den ut? Heldigvis er alle hjelpemidler tillatt, så det er bare å finne frem en fjær. Jeg strekker den og merker da en kraft som virker mot forlengelsen. Jo mer jeg strekker fjæren, jo mer kraft må jeg bruke. Jeg har en vag erindring om Hookes lov – *Ved strekk innenfor elastisitetsgrensen er forlengelsen av fjæren proporsjonal med spenningen i fjæren.* Dette fant Robert Hooke ut i 1678, og nå kommer vi etter. Jeg kan dermed skrive ned et uttrykk for denne kraften basert på mitt forsøk og observasjoner.

$$F_{\text{fjær mot } m_1} = -k(x - x_0) \quad (12.35)$$

Her er  $x_0$  fjærens likevektslengde uten belastning, og  $k$  er fjærkonstanten som er avhengig av hva slags fjær en har og hvordan den er bygget. Med denne nye kunnskapen og valg av x-akse langs skråplanet kan vi skrive ned bevegelsesligningene på nytt.

$$-k(x - x_0) - m_1 g \sin(\alpha) + S_{\text{snor mot } m_1} = m_1 a \quad (12.36)$$

$$S_{\text{snor mot } m_2} r - S_{\text{snor mot } m_1} r = I \frac{a}{r} \quad (12.37)$$

$$m_2 g - S_{\text{snor mot } m_2} = m_2 a \quad (12.38)$$

Vi blir bedt om å finne klossenes lineære akselerasjon og trinsens vinkelakselerasjon like etter at systemet slippes fri. Da er fjæren i sin likevektposisjon uten belastning, så vi får ikke noe bidrag derfra. Vi finner:

$$S_{\text{snor mot } m_1} = m_1(g \sin(\alpha) + a) \quad (12.39)$$

$$S_{\text{snor mot } m_2} = m_2(g - a) \quad (12.40)$$

Dette settes inn i ligningen for trinsen, og vi får:

$$m_2(g - a)r - m_1(g \sin(\alpha) + a)r = I \frac{a}{r} \quad (12.41)$$

Så løser vi dette med hensyn på akselerasjonen  $a$ :

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin(\alpha)) g r^2}{(m_2 + m_1) r^2 + I} = \frac{(1,0 \text{ kg} - 0,5 \text{ kg} \sin(30^\circ)) \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,15 \text{ m})^2}{(1,0 \text{ kg} + 0,5 \text{ kg}) \cdot (0,15 \text{ m})^2 + 0,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 1,2 \text{ m/s}^2 \quad (12.42)$$

Siden  $a > 0$  betyr det at den hengende klossen  $m_2$  går nedover, mens den på skråplanet  $m_1$  går oppover.

Da er det bare en oppgave igjen:

- d) På grunn av fjæren vil systemet ende opp med å svinge frem og tilbake rundt en likevektposisjon. Hvor mye er fjæren forlenget når systemet er i denne likevektposisjonen?

Nå har fjæren en belastning, massene  $m_1$  og  $m_2$  og trinsen, og vil få en ny likevektposisjon. Fjæren vil svinge frem og tilbake rundt denne likevektposisjonen.

$$F_{\text{fjær mot } m_1} = -k(x - x_{\text{likevekt}}) \quad (12.43)$$

Siden fjærkraften har formen som vist i (12.43), vil akselerasjonen være null når  $x = x_{\text{likevekt}}$ . Vi kan sette opp bevegelsesligningene for det tilfellet og finne hvor mye fjæren er forlenget i det tilfellet:

$$-k(x_{\text{likevekt}} - x_0) - m_1 g \sin(\alpha) + S_{\text{snor mot } m_1} = 0 \quad (12.44)$$

$$S_{\text{snor mot } m_2} r - S_{\text{snor mot } m_1} r = 0 \quad (12.45)$$

$$m_2 g - S_{\text{snor mot } m_2} = 0 \quad (12.46)$$

Det gir videre:

$$-k(x_{\text{likevekt}} - x_0) - m_1 g \sin(\alpha) + m_2 g = 0 \quad (12.47)$$

$$(x_{\text{likevekt}} - x_0) = \frac{(m_2 - m_1 g \sin(\alpha))g}{k} = \frac{(1,0 \text{ kg} - 0,5 \text{ kg} \sin(30^\circ)) \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{50 \text{ N/m}} = 0,15 \text{ m} \quad (12.48)$$

Vi får altså en forlengelse av fjærens likevektposisjon på 0,15 m når den blir belastet med klossene  $m_1$  og  $m_2$ .

Her var det slutt på oppgaven, men da fjæren er et nytt bekjentskap, så kan vi jo se litt nærmere på den.

$$F = -kx \quad (12.49)$$

Her er  $x = 0$  likevektstilstanden. Jo mer vi strekker i fjæren, jo tyngre blir det. Vårt arbeid tilfører fjæren potensiell energi, og fjæren gjør et negativt arbeid på oss.

$$W_{\text{fjær}} = -\int_0^x F dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2} k x^2 = E_{p, \text{fjær}} \quad (12.50)$$

Dersom vi skriver (12.49) som en differensialligning:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (12.51)$$

Ligning på denne formen har vi sett før i kapittelet «**Vel bevert**» formel (9.13). Igjen har vi en harmonisk oscillator. Posisjonen kan uttrykkes på formen:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (12.52)$$

Hvor  $\omega = \sqrt{k/m}$ , bestemmer utslag ved  $t = 0$  og  $A$  er maksutslag for fjærens svingninger, og det bestemmer vi selv med hvor mye vi drar fjæren ut. Perioden på svingningene blir  $P = 2\pi \sqrt{m/k}$ .

Kanskje vi skal gå tilbake til oppgaven og prøve om vi kan finne ut hvordan systemet vårt svinger. Vi starter med de tre grunnligningene våre (12.36) til (12.38).

$$-k(x - x_0) - m_1 g \sin(\alpha) + S_{\text{snor mot } m_1} = m_1 a \quad (12.53)$$

$$S_{\text{snor mot } m_2} r - S_{\text{snor mot } m_1} r = I \frac{a}{r} \quad (12.54)$$

$$m_2 g - S_{\text{snor mot } m_2} = m_2 a \quad (12.55)$$

Så løser vi med hensyn på snordragene:

$$S_{\text{snor mot } m_1} = m_1 (g \sin(\alpha) + a) + k(x - x_0) \quad (12.56)$$

$$S_{\text{snor mot } m_2} = m_2 (g - a) \quad (12.57)$$

Dette settes inn i ligningen for trinsen (12.54), og vi får:

$$m_2 (g - a) r - (m_1 (g \sin(\alpha) + a) + k(x - x_0)) r = I \frac{a}{r} \quad (12.58)$$

Så samler vi ledd med akselerasjon  $a$  på venstre side:

$$a(m_2 + m_1) + I \frac{a}{r^2} = m_2 g - (m_1 (g \sin(\alpha) + k(x - x_0))) \quad (12.59)$$

Og løser med hensyn på  $a$ :

$$a = \frac{-k(x - x_0) + g(m_2 - m_1 \sin(\alpha))}{(m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2}} \quad (12.60)$$



Så omformer vi for å få det på en form som á la (12.48):

$$F = \left( (m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2} \right) a = -k(x - x_{\text{likevekt}}) \quad (12.61)$$

Vi ser at formelen for fjærkraft (12.60) blir essensielt den samme, men likevektspunktet forskyves på grunn av massene fra klossene og trinsen. Tregghetsmomentet til trinsen er jo  $I = \frac{1}{2}m_T r^2$ . Den nye likevektposisjonen stemmer med det vi tidligere (12.48) har funnet ut:

$$x_{\text{likevekt}} = x_0 + \frac{g(m_2 - m_1 \sin(\alpha))}{k} \quad (12.62)$$

Redefinerer vi x-aksen og setter den nye likevektposisjonen til  $x_{\text{likevekt}} = 0$ , blir  $x_0 = -0,15$  m og (12.61) kan skrives som:

$$F = \left( (m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2} \right) a = -kx \quad (12.63)$$

Da kan vi bruke det vi har lært om fjærer generelt til å finne vinkelhastighet og periode for svingningene:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{(m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2}}} \quad (12.64)$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{(m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2}}{k}} \quad (12.65)$$

Er det mulig å finne et uttrykk for systemet bevegelse? Det vi vet, er akselerasjonen og fart idet systemet slippes fra den opprinnelige likevekstposisjonen til fjæren  $x_0$ . La oss starte med å regne ut perioden:

$$\frac{k}{(m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2}} = \frac{50 \text{ N/m}}{(1,0 \text{ kg} + 0,5 \text{ kg}) + \frac{0,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{(0,15 \text{ m})^2}} = 8,41 \text{ N/m} \cdot \text{kg} \quad (12.66)$$

Perioden  $P$  blir:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{1}{8,41 \text{ N/m} \cdot \text{kg}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{8,41 \text{ kg} \cdot \text{m/m} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}}} = 2,17 \text{ s} \quad (12.67)$$

Vi kan nå omforme (12.61) til:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{(m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2}}x \quad (12.68)$$

Løsningen må være på formen:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (12.69)$$

Den dobbelderiverte av cosinus eller sinus blir det negative av seg selv. Vi velger cosinus av gammel vane. Her er  $A$  er maksutslag for svingningen (amplituden),  $\omega$  vinkelhastigheten og  $\phi$  en konstant som bestemmes av randbetingelser til differensialligningen (12.68).

Ved  $x_0$  er amplituden maksimal. Det var jo der vi slapp systemet fra ved start, og høyere enn det kan vi ikke komme siden energien i systemet er bevart:

$$x(0) = x_0 = -0,15 \text{ m} = A \cos(\phi) \quad (12.70)$$

Denne randbetingelsen bestemmer  $\phi = \pi$

$$x(t) = 0,15 \text{ m} \cdot \cos(\omega t + \pi) \quad (12.71)$$

Farten finner vi ved å derivere (12.68):

$$v(t) = -\omega \cdot 0,15 \text{ m} \cdot \sin(\omega t + \pi) \quad (12.72)$$

Farten var 0 ved  $x_0$ :

$$v(0) = 0 = -\omega \cdot 0,15 \text{ m} \cdot \sin(\pi) = 0 \quad (12.73)$$

Det er som seg hør og bør. Farten må være null når svingningen snur.

Akselerasjonen finner vi ved å derivere enda en gang:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot 0,15 \text{ m} \cdot \cos(\omega t + \pi) \quad (12.74)$$

Ved  $t = 0$ :

$$a(0) = -\omega^2 \cdot 0,15 \text{ m} \cdot \cos(\pi) = \omega^2 \cdot 0,15 \text{ m} = 8,41 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \text{kg} \cdot 0,15 \text{ m} = 1,2 \text{ m/s}^2 \quad (12.75)$$

Og dette svaret er i fullstendig harmoni med det vi fant i (12.42).

Farten er maksimal ved likevektposisjonen. Denne farten kan vi finne ved å finne maks for  $v(t)$ :

$$v(t) = -\omega \cdot 0,15 \text{ m} \cdot \sin(\omega t + \pi) \quad (12.76)$$

Det vil skje når  $\omega t = n\frac{\pi}{2}$  hvor  $n$  er et positivt heltall. Da er  $t = n\frac{\pi}{2\omega}$ :

$$v\left(n\frac{\pi}{2\omega}\right) = \mp \omega \cdot 0,15 \text{ m} = \mp \sqrt{\frac{k}{(m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2}}} \cdot 0,15 \text{ m} = \mp 2,9 \text{ m/s} \cdot 0,15 \text{ m} = \mp 0,43 \text{ m/s} \quad (12.77)$$

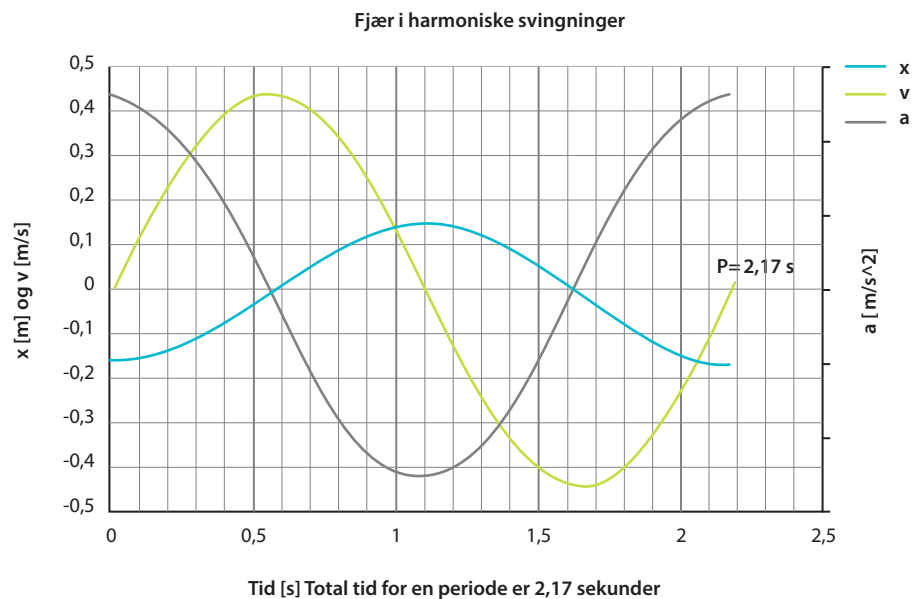
Denne farten kan vi også finne ved energibetraktninger:

$$E_k = \frac{1}{2} \left( (m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2} \right) v^2 = E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (12.78)$$

Vi vet at amplitude er 0,15 m, og det bestemmer den potensielle energien som kan omgjøres til kinetisk:

$$v = \mp \sqrt{\frac{k}{(m_2 + m_1) + \frac{I}{r^2}}} \cdot 0,15 \text{ m} = \mp 0,43 \text{ m/s} \quad (12.79)$$

Vi ser at vi får samme resultat i (12.77) og (12.79). Siden alle hjelpemidler er tillatt, finner jeg til slutt frem Excel og får tryllet frem følgende harmoniske grafer i Figur 12.6. Alt er i sin skjønneste orden og i henhold til fysikkens lover.



**Figur 12.6** Posisjon  $x$ , fart  $v$  og akselerasjon  $a$  for vårt system



# 13

## Kapittel 13

---

# Kvalitet i høyere utdanning

«The solutions are all simple – after you have arrived at them.  
But they're simple only when you know already what they are.»

Zen and the Art of Motorcycle Maintenance 1974

Robert M. Pirsig (1928–2017)

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Harmonisk oscillator, frie svingninger, dempede svingninger, tvungne svingninger, grunn/egenfrekvens, resonans, Q faktor, koblede oscillatorer

---

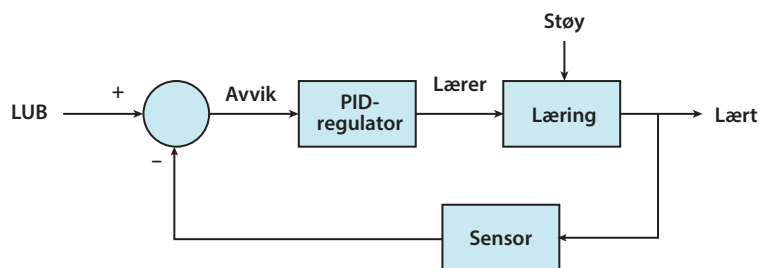
«Quality never goes out of style!» Vår kjære kunnskapsminister ønsker kvalitet i høyere utdanning. Hva er kvalitet og hvordan kan den høynes? En mulig metode er å utrope oss selv til Stellar Centre of Educational Excellence, eller så kan vi lese Pirsigs strålende metafysiske roman om kvalitet – Zen og kunsten å vedlikeholde en motorsykkel. Begge løsninger er uangripelige, men blir kvaliteten bedre?

Ifølge Norsk Standard, NS-EN ISO 9000, defineres kvalitet som i hvilken grad en samling av iboende egenskaper oppfyller behov eller forventning som er angitt, vanligvis underforstått eller obligatorisk.

Denne definisjonen leder til spørsmålet om hvem sine behov eller forventninger som skal oppfylles. Tenker en på studentene, lærerne, undervisningsinstitusjonene, samfunnet eller kunnskapsministeren?

Er kvalitet i det hele tatt en objektiv, målbar størrelse? Er et femstjerners hotell med hårføner, betal-tv, boblebad og trådløst internett bedre enn et koselig, lite, skjermfritt pensjonat?

I et forsøk på å få kontroll på kvaliteten i høyere utdanning har en fått Bologna-prosessen og PISA-tester. Det skrives læringsutbyttebeskrivelser (LUB-er) over en lav sko, og man prøver på den måten å gjøre det hele målbart. LUB-en angir målet for læringen, og da er det bare å bruke en enkel PID-regulatorsøyfe på studentene for å nå de ønskede resultater:

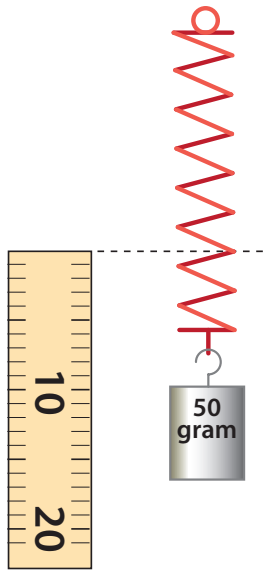


Figur 13.1 Regulator-system for læring

«Case closed»? Vel, det er noen utfordringer med denne angrepsmåten. Har studentens modenhet og interesser blitt tatt i betraktning i LUB-en? Er regulering den beste måten å oppnå resultater på? Som kjent brukes reguleringsløyfer når den underliggende fysiske prosessen ikke er fullt ut forstått. Manglende kunnskap repareres med negativ tilbakekobling.

Hva vet en om læring? Finnes det en god modell som kunne hjelpet oss å øke kvaliteten i høyere utdanning? Pedagoger snakker om læringssyn. Disse er ofte ideologisk forankret. Det er for tiden sosialkonstruktivismen, med sin hypotese om at det nærmest er umulig å lære noen noe nytt, og skal det i så fall skje, må det være i samhandling med andre, som rår grunnen. Er den riktig? Er den vitenskapelig etterprøvable?

Nei, la oss heller innføre en helt ny fysisk modell for læring og kvalitet i høyere utdanning. De siste hundre år har pedagogene prøvd å forklare læring med humanistiske og samfunnsvitenskapelige begrepsapparater. Suksess? Vel, det er kanskje på tide å snu



**Figur 13.2** Modell av en student

på flisen – å foreta en såkalt kopernikansk vending – og heller forklare pedagogikk med utgangspunkt i en naturfaglig verdensanskuelse.

Det du nå vil lese, representerer et før- og etter-øyeblikk i pedagogikkens historie. Thomas Kuhn ville grått av glede over dette paradigmeskiftet i læringsteori. Vi enkle realister elsker enkle og vakre modeller. La oss skride til verket utstyrt med Ockhams barberkniv.

Den lærende student kan beskrives som en fjær med livets lodd i enden. For noen studenter vil denne modellen, harmonisk oscillator, være en overforenkling, men det er bedre med en etterprøvbar modell enn ren syensing.

Fjæren representerer studentens fleksibilitet, mens loddet representerer treghet. Med Newtons,  $F = ma$ , og Hookes,  $F = -kx$ , lover i verktøykassen kommer en fort frem til følgende differensialligning:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) \quad (13.1)$$

Hvor  $x$  er læringsamplitude,  $k$  er fjærkonstanten og  $m$  er massen til loddet. Den generelle løsningen på denne ligningen er:

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (13.2)$$

Her er  $A$  og  $B$  konstanter som bestemmes av studentens forutsetninger (randbetingelser). Som en ser, vil studenten overlatt til seg selv svinge, med frie svingninger, læringsmessig i harmoni med sin egen grunnfrekvens:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13.3)$$

Alle som har studert, har nok merket at det er litt friksjon i enhver læreprosess. En bedre modell for egen læring vil da inneholde et friksjonsledd:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0 \quad (13.4)$$

Hvor  $b$  er friksjonen i læringsprosessen. Dette er en homogen annenordens differensialligning med konstante koeffisienter. Hvordan løses den? En måte er å anta at løsningen er på formen:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (13.5)$$

At denne antagelsen er god, ser en ved at den deriverte av en eksponentialfunksjon også er en eksponentialfunksjon. Innsatt i ligningen får en:

$$\lambda^2 m e^{\lambda t} + \lambda b e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0 \quad (13.6)$$

$$(\lambda^2 m + \lambda b + k) e^{\lambda t} = 0 \quad (13.7)$$

Da  $e^{\lambda t}$  ikke kan bli null, må det i parentesen være lik null:

$$(\lambda^2 m + \lambda b + k) = 0 \quad (13.8)$$

Dette er en annengradsligning, som i denne sammenhengen kalles den karakteristiske ligning, og som er overkommelig å løse:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (13.9)$$

Basert på om det som er under rottegnet er positivt, null eller negativt, får en tre ulike løsninger.

Positivt (overkritisk demping,  $b > 2\sqrt{mk}$ )

$$x(t) = C e^{\lambda_1 t} + D e^{\lambda_2 t} \quad (13.10)$$

Der  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er de to verdiene av  $\lambda$  i ligning (13.9) som begge er negative. Videre er C og D konstanter. I dette tilfellet er motstanden mot læring stor, og den dempes raskt.

Null (kritisk demping,  $b = 2\sqrt{mk}$ )

$$x(t) = (Ct + D) e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} t} \quad (13.11)$$

Hvor C og D er konstanter. Her yter studenten optimal motstand mot læring, og den dempes meget raskt.

Negativt (underkritisk demping,  $b < 2\sqrt{mk}$ )

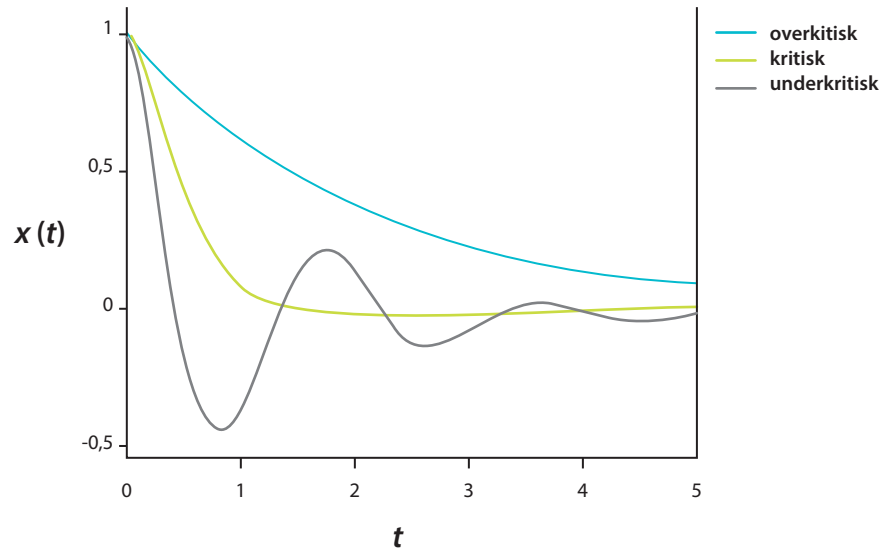
I dette tilfellet får en komplekse røtter og en svingende innlæring:

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m} t} \left( C \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} t\right) + D \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} t\right) \right) \quad (13.12)$$

Her C og D er konstanter. Vi ser at dersom studentens motstand mot læring blir liten, har læringsprosessen karakter av en dempet svingebevegelse.

I Figur 13.3 er det vist hvordan det kan gå med læring når en litt motvillig student er overgitt til seg selv. Som en ser av figuren, er læringsamplituden størst i det overkritiske tilfellet når det er stor friksjon ved innlæring. Det er slitsomt å lære. Det finnes ingen kongevei til kunnskap.





**Figur 13.3** Læring som funksjon av tid når studenten yter motstand

Skal studenten lære mer, må han samhandle med omverdenen, det være seg lærere, lærebøker, praksis eller medstudenter. Studenten må få en liten dytt i riktig retning og i takt med sin grunnfrekvens (eller underharmoniske av den), slik at allerede innarbeidet kunnskap holdes ved like samtidig som ny læring oppnås.

Dersom vi også bruker harmonisk oscillator (fjær & lodd) som modell for ytre påvirkning, kan studenten settes i tvungne svingninger (læring) basert på følgende formel:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F \cos(\omega_F t) \quad (13.13)$$

Hvor  $b$  er friksjonen i læringsprosessen,  $F$  er kraften (læringstrykket) og  $\omega_F$  er påtrykksfrekvensen.

I denne omgang skal vi hoppe bukk over utregningene som må til for å finne løsningen til denne differensialligningen. Løsningen for denne læreprosessen, en liten stund etter oppstart, er gitt ved:

$$x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\left(\omega_F^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega_F}{m}\right)^2}} \cos(\omega_F t + \varphi) \quad (13.14)$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{b\omega_F}{m}}{\omega_F^2 - \omega_0^2} \quad (13.15)$$

Der  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

På grunn av  $\varphi$  vil ikke læringsutbyttet  $x(t)$  generelt sett være i fase med læringstrykket  $F\cos(\omega_f t)$ . Ønsker en optimal læring, må læringstrykket være på bølgelengde (resonans) med studentens egenfrekvens:

$$f_{\text{frek res}} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13.16)$$

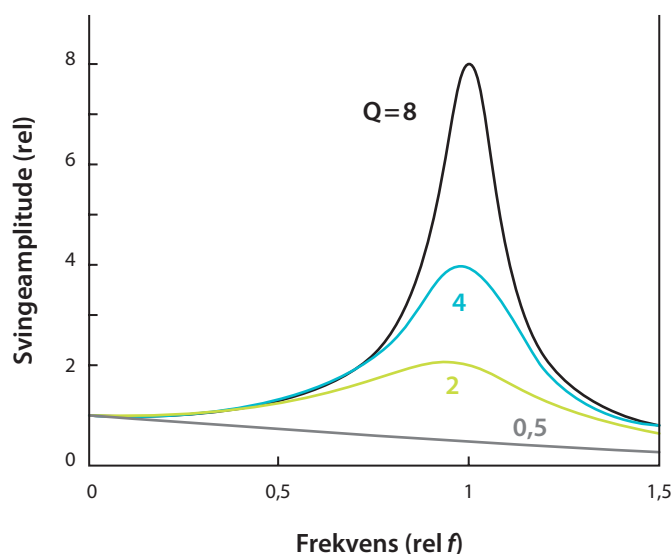
Siden det er en smule friksjon  $b$  i læreprosessen, vil maksimalt læringsutbytte oppnås dersom læringstrykkets frekvens er litt lavere enn studentens egenfrekvens:

$$f_{\text{amp res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} \quad (13.17)$$

Denne læringsmessige harmonimodellen, i takt med students modning og utvikling, er til min overraskelse helt i tråd med Steinerskolens pedagogiske prinsipper selv om de er basert på et esoterisk idésystem som kun de innvidde forstår. Vår modell kan heldigvis forstås av alle.

Som om ikke det er nok, så har vår modell en målbar størrelse for kvalitet – den såkalte  $Q$  faktoren. Læringsprosessen beskrevet med ligning (13.4) har altså en  $Q$  faktor som sier noe om hvor lett det er å få i gang læringsprosessen, og hvor lenge kunnskapen holder seg over et gitt nivå (læringen sitter i) etter at læringen er over:

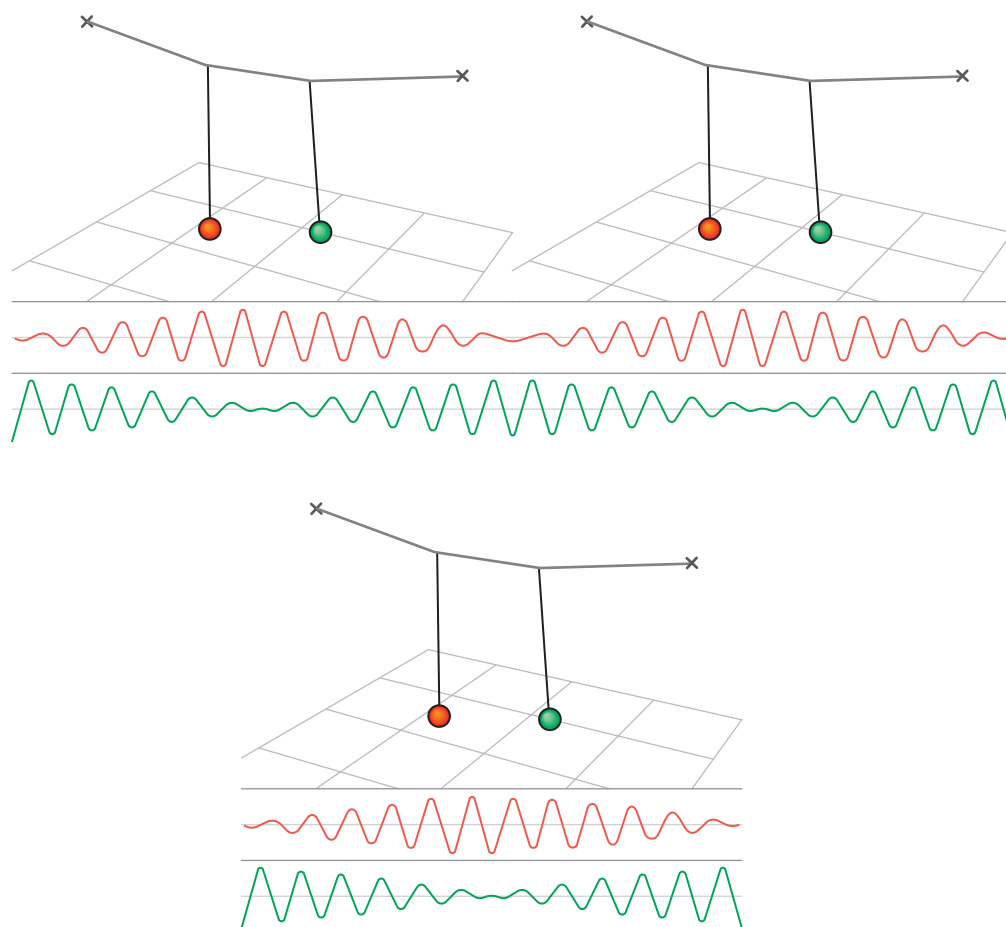
$$Q = \sqrt{\frac{mk}{b^2}} \quad (13.18)$$



Jo høyere  $Q$  faktor jo bedre kvalitet i læring og høyere utdanning. At studentene selv har ansvar for egen læring, ser en ved at de studentspesifikke  $m$  og  $k$  står over brøkstreken. Jo mer fleksibel en er ( $k$ ) jo raskere blir læringen, og med en por-sjon treghet ( $m$ ) blir utslagene større. Det siste kan virke paradoksalt. Riktignok gjør stor  $m$  det vanskeligere å komme i gang, men når en først er i siget (flytsonen), går det som en lek, og med et stort «svinghjul» klarer en de bratteste kneiker og store utfordringer. Desto mer friksjon  $b$  det er i læringen, jo dårligere blir kvaliteten. Det er flott at studentene tenker selv og er kritiske, men skal god læring oppnås, må lærer og student i hvert fall være på samme planet.

**Figur 13.4** Læringsamplitude som funksjon av påtrykt frekvens relativt til egenfrekvens

Men læringen må jo gå begge veier. Det hevdes at den beste læring en kan få, er å undervise selv. Det kan jeg skrive under på. Finnes det en modell for denne typen interaksjon? Selvfølgelig. Sammenkoblede harmoniske oscillatorer.



**Figur 13.5** Se det svinge i harmoni

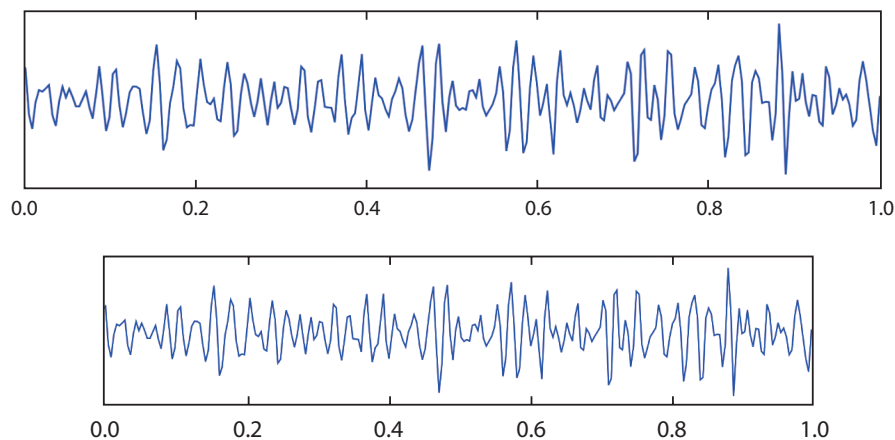
Her setter læreren (den røde pendelen) i gang svingninger som overføres til studenten (den grønne pendelen) og tilbake igjen i en evig runddans til friksjonen sliter dem begge ut.

Men dette har jo ingenting med virkeligheten å gjøre, kan du jo innvende. Men hva er virkelighet? Det har filosofer siden tidenes morgen lurt på. David Hume (1711–1776) sjokkerte sin samtid ved å påstå at alt som fantes i ens bevissthet var basert på sanseinntrykk, og å tilskrive sammenhengen mellom årsak og virkning til vanen. Det tok Immanuel Kant (1724–1804) tusen uleselige sider (Kritikk av den rene fornuft)

å hevde at kategoriene tid og rom var iboende i oss og kunne brukes til å få orden på sanseintrykk og årsakssammenhenger.

Tenk deg at du var født uten sanser. Hva ville du kunne lære? Ikke stort. All læring krever sanser og evne til å snakke og tenke. Hvordan er så sansene bygget opp? Ta øynene for eksempel. De er en forlengelse av hjernen som har evnen til å sanse elektromagnetiske bølger på gitte frekvenser. Ved hjelp av fire typer sensorer (staver og tapper) på netthinnen omgjøres bølgene til elektriske impulser som sendes til hjernen. Disse sensorene er harmoniske elektriske oscillatorer. Hva med ørene? Mekaniske oscillatorer som omsetter lydtrykk til elektriske impulser som sendes til hjernen. Slik kan en fortsette. Prinsipielt er alle sanser bygget som oscillatorer. Også vår tale styres av resonanser skapt i luftrøret.

Hva med hjernen da? Selve krumtappen i det lærende systemet. Den er et gigantisk nettverk av sammenkoblede elektriske oscillatorer. Svingningene som kommer frem ved læring, kan måles som gammabølger rundt 40 Hertz.



**Figur 13.6** Tidsserie med gammabølger

I Figur 13.7 ser vi målinger utført på et barn ved innlæring av gangetabellen.

Vår tids hjerneforskning, den ikke fullt så harmoniske nobelprisvinnende Moser-familien, har også gitt et pek til og kommet på kant med Kant, da de ved hjelp av rotter har funnet ut at hjernen bygger opp rom- og tidsfølelse basert på ervervede sanseintrykk og hjerneoscillasjoner.



Når alt som har med læring å gjøre – sanser, kommunikasjon og tenkning – koker ned til oscillasjoner, er det vel på høy tid at forståelsen av læreprosessen også blir basert på en oscillator-modell. Det har vi gjort og dermed brakt kvalitet i pedagogikk og høyere utdanning et skritt videre. Og vi er heldigvis ikke alene. Det foregår en hektisk aktivitet på området educational neuroscience. Pedagogikken går en spennende fremtid i møte, og kanskje vi en dag vil kunne lære ved å stimulere hjernen direkte. Da blir jo all skolegang overflødig og jeg arbeidsledig!

Figur 13.7 7\*8=???



---

# Følg strømmen

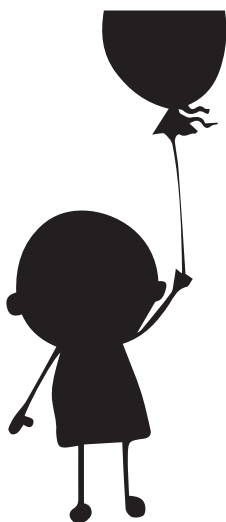
«Alt flyter.»

Heraklit (544–475 fvt.)

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Arkimedes lov, oppdrift, trykk, pascal, barometerligningen, kompressibilitet, trykkfordeling i inkompressibel væske, hydraulisk jekk, stabilitet, oppdriftssenter, fluid, stasjonær strøm, kontinuitetsligningen, Bernoullis ligning, flyging og løft, venturirør, Torricellis lov, indre friksjon, skjærkrefter, viskositet, laminær strøm, Poiseuilles lov, turbulens, Reynoldstall, kompressibel gass, Mach-tall

---



Figur 14.1 Barn med ballong

Det er alltid et barn som gråter. Denne gangen er det mitt. Jeg ser ballongen hennes stige til værs. Hva var snordraget i hånden hennes før grepet glapp? Hvor høyt vil ballongen stige? Vil hun til slutt få sitt eget objekt i verdensrommet? I ren empati deler jeg ikke disse tankene med henne, men kjøper en ballong til. Det er jo tross alt 17. mai.

Ballongen stiger til værs siden den er fylt med en gass som er lettere enn luft. I dette tilfellet er det brukt helium. Ved bakken er heliums tetthet  $\rho = 0,1787 \text{ kg/m}^3$  og luftens tetthet er  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ . Ballongen var tilnærmet kulerund og hadde en radius på 25 cm. Volumet blir da:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0,25)^3 \text{ m}^3 = \frac{4}{3}\pi(0,25)^3 \text{ m}^3 = 0,065 \text{ m}^3 \quad (14.1)$$

Du har sikkert hørt om Arkimedes og hans Eureka!-øyeblikk i badekaret. Da oppdaget han at oppdriften til kroppen hans i vannet var lik tyngden av den væskemasse han fortrenget. La oss beregne ballongens oppdrift  $O$  i luft:

$$O = \rho_{\text{luft}} Vg = 1,2 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,065 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 0,76 \text{ N} \quad (14.2)$$

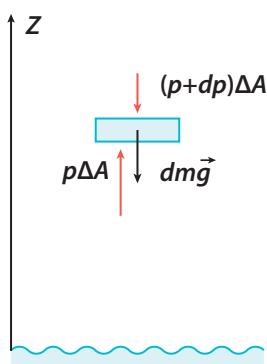
$g$  er tyngdens akselerasjon. Kraften som virker på ballongen i oppoverretning, blir da oppdriften minus tyngden av helium i ballongen. Vi ser bort fra vekten av selve ballongen:

$$F = O - \rho_{\text{helium}} Vg = 0,76 \text{ N} - 0,1787 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,065 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 0,65 \text{ N} \quad (14.3)$$

Snordraget i min datters hånd er derfor 0,65 N, Figur 14.1.

Siden det virker en kraft oppover, vil ballongen etter å ha bli sluppet akselerere, siden oppdriften er større enn luftmotstanden, med stadig større fart og forsvinne ut av solsystemet før vi får sukk for oss. Vel, det er ikke fullt så enkelt. Basert på bilder jeg har sett fra verdensrommet, så tar atmosfæren slutt. Det betyr at på et punkt vil tettheten av helium i ballongen bli lik tettheten av luft utenfor den. Da vil oppdriften bli lik tyngden av helium i ballongen, og en vil ikke lenger ha noen kraft oppover. Dette er maksimum høyde ballongen kan nå, men det er jo mulig at den sprekker tidligere dersom materialet i ballongen ikke er sterkt nok.

Er det mulig å finne trykkfordelingen i atmosfæren? La oss se på et atmosfæreelement med en gitt masse, Figur 14.2. Trykket er gitt ved  $p$  og forandring i trykket ved  $\Delta p$ ,  $\Delta A$  er et lite flatelement,  $dm$  massen i flatelementet og  $\rho$  tetthet.

Figur 14.2 Element av atmosfære i en høyde  $z$  over havet

Trykk er definert som kraft per flateenhet:

$$p = \frac{F}{A} \quad (14.4)$$



Dersom atmosfæren er i ro, likevekt, kan vi skrive følgende for vårt atmosfæreelement:

$$p \Delta A - (p + dp) \Delta A = \rho(z) \Delta A dz g \quad (14.5)$$

Ved å ordne ligningen får vi følgende differensialligning:

$$dp = -\rho(z) g dz \quad (14.6)$$

For en såkalt ideell gass, ikke svært lav temperatur eller høyt trykk, har en funnet følgende sammenheng:

$$\frac{pV}{T} = \text{konstant} \quad (14.7)$$

Dersom vi antar at atmosfærens temperatur er konstant med høyden – noe som jo ikke er helt sant, men en grei tilnærming – kan en skrive:

$$pV = p_0 V_0 \quad (14.8)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0}{V} \quad (14.9)$$

Her er  $p_0$  trykket ved havoverflaten og  $V_0$  volumet ved havoverflaten ( $z = 0$ ).

Siden massen av atmosfæreelementet er konstant, har en:

$$m = \rho V = \rho_0 V_0 \quad (14.10)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V} \quad (14.11)$$

Vi finner da følgende sammenheng mellom tetthet og trykk:

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{p_0} p(z) \quad (14.12)$$

Setter vi dette resultatet inn i differensialligningen, får vi:

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p(z) g dz \quad (14.13)$$

Dette kan vi integrere opp ved å separere variable:

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^z dz \quad (14.14)$$

$$\ln\left(\frac{p(z)}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0}{p_0} g z \quad (14.15)$$

$$p(z) = p_0 e^{-\alpha z}; \alpha = \frac{\rho_0}{p_0} g \quad (14.16)$$

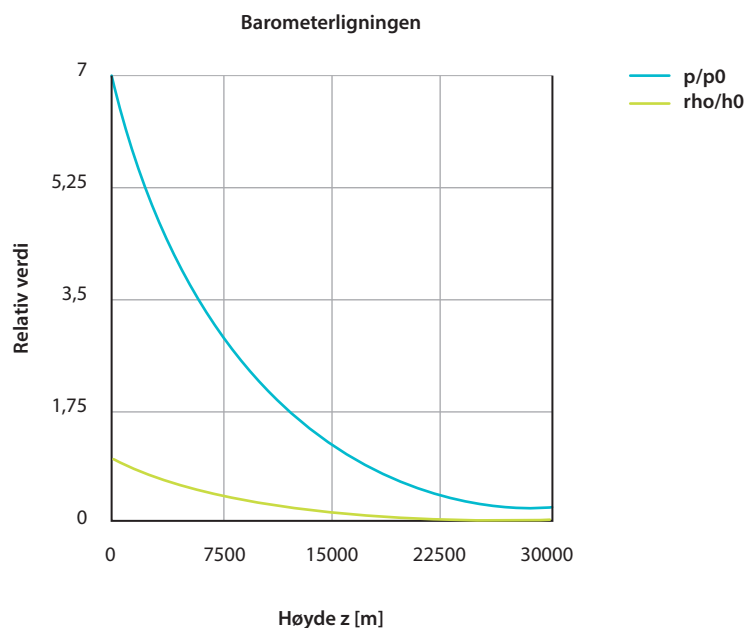
Denne ligningen kalles barometerligningen. Den viser at trykket avtar eksponentielt med høyden  $z$ . Tilbake til ballongen. Hvor høyt vil den stige? Vi må finne den høyde –  $z$ -verdi – hvor tettheten til luften blir lik heliumets i ballongen:

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{p_0} p(z) = \frac{\rho_0}{p_0} p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g z} \quad (14.17)$$

$$z = -\frac{p_0}{g \rho_0} \ln\left(\frac{\rho(z)}{\rho_0}\right) \quad (14.18)$$

$$z = -\frac{1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot \ln\left(\frac{0,1787 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right) = 16,4 \text{ km} \quad (14.19)$$

Trykket av atmosfæren ved bakken er  $p_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Enheten for trykk er Pascal og er definert som  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ . I grafen i Figur 14.3 ser vi den relative verdi av trykket mot trykket ved bakken og tetthet relativt til heliums tetthet ved bakken. Ved cirka 16 kilometer er atmosfærens tetthet tilnærmet lik tettheten til heliumet i ballongen, og ballongen vil dermed slutte å stige.

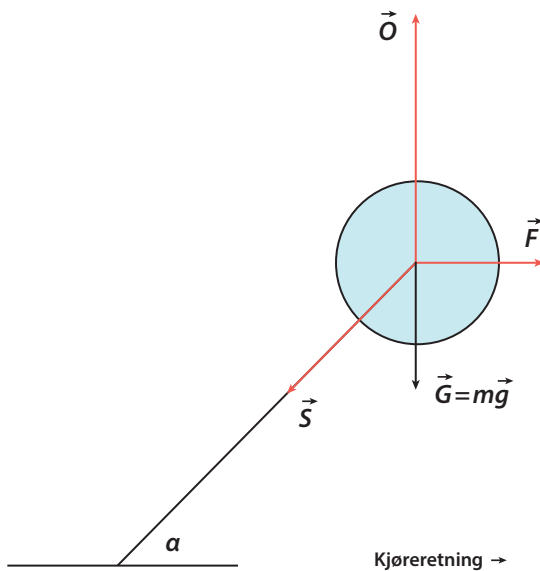


**Figur 14.3** Relative verdier for atmosfærens trykk ( $p$ ) og tetthet  $\rho$

Er det mulig å få ballongen til å stige enda mer? Absolutt! Værballonger blir for eksempel sendt opp «slunkne» slik at de kan utvide seg underveis på grunn av den minkende trykkforskjellen. Dermed vil heliumet i værballongen ha et trykk som er mindre enn heliumets trykk ved overflaten. Værballonger stiger typisk til en høyde



Figur 14.4 Atmosfæren er tynn, buet og vakker



Figur 14.5 Min datters ballong

på 30 kilometer. Finnes det en høyderecord for ballonger? I 2002 nådde ballongen med det prosaiske navnet BU60-1 en høyde på 53 kilometer. Figur 14.4 viser et bilde fra en ballong i 30 kilometers høyde. Det er kanskje på tide å melde seg ut av «flat earth society»?

Tilbake til min datters ballong. På vei hjem fra 17. maifeiringen tok vi toget. Da toget startet å akselerere, så vi til vår undring at ballongen for fremover mens vi ble trykket tilbake i setene. Hva skjedde? Jeg lukket øynene for å tenke bedre. Hva var det salige Einstein sa? «Uten ytre referanser kan vi ikke skille mellom tyngdens akselerasjon og annen akselerasjon». I toget opplever vi da at tyngden får en komponent bakover som presser oss mot setet, og dermed får oppdriften en komponent forover som er  $\vec{F}$ . Ballongen blir altså påvirket av summen av krefter som virker på den, og vil stå på skrå fremover. I Figur 14.5 ser vi min datters ballong med krefter inntegnet.  $\vec{O}$  angir oppdriften i vertikal retning. En annen måte å forstå dette på er at på grunn av tregheten vil mer av luften samles bak i togvognen enn fremme så lenge toget akselererer. Dette gjør at lufttrykket på baksiden av ballongen blir større enn trykket på forsiden. Ballongen blir altså påvirket av en kraft  $\vec{F}$  fremover. Siden kraften  $\vec{F}$  forårsakes av forskjell i lufttrykk på bak- og forside, kan denne kraften, i likhet med  $\vec{O}$ , tolkes som en oppdriftskraft.

Før vi forlater dette problemet – hva med tregheten til ballongen? Vil ikke den gi en tilsynelatende kraft bakover? Jo, det vil den. Men siden ballongen har lavere massetetthet enn luften, blir denne tilsynelatende kraften mindre enn «oppdriftskraften» fremover, så konklusjonen holder fremdeles.

Dersom en måler vinkelen  $\alpha$ , kan ballongen brukes som akselerometer. Når toget bremses opp, går ballongen bakover. Denne tilsynelatende ufysiske bevegelsen gjør hvert stopp underveis til en fest.

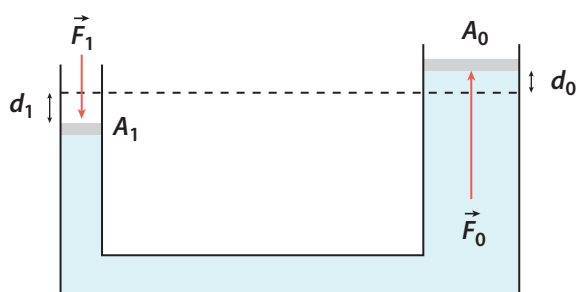
Liker du å bade? Hvor dypt har du dykket uten hjelpemidler? Det som begrenser de fleste av oss, er det raskt økende trykket. Hvorfor forandrer trykket seg mye raskere i vann enn i luft? Først og fremst fordi tettheten til vann er mye større enn tettheten til luft, men også fordi væsker (som vann) i motsetning til gasser (som luft) er inkompressible (ikke sammentrykkbare). Tettheten for vann er altså den samme uavhengig av dybde,  $\rho(z) = \text{konstant}$ . Vi kan da bare starte med ligning (14.6) med motsatt fortegn på  $z$ , da vi skal nedover i dypet, for å finne trykkfordelingen:

$$dp = \rho g dz \quad (14.20)$$

$$\int_{p_0}^p dp = \rho g \int_0^z dz \quad (14.21)$$

$$p = p_0 + \rho g z \quad (14.22)$$

Her er  $p_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  trykket av atmosfæren over vannet. Vi ser at trykkstigningen øker lineært med dybden og øker med  $\rho g \cdot 1 \text{ m} = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} \approx 0,1 \text{ atm}$  per meter. Ikke rart det gjør vondt i ørene etter hvert som en svømmer nedover.



Figur 14.7 Prinsippet for en hydraulisk jekk

Jeg vet ikke om du føler det på samme måte som meg, men å skifte til vinterdekk er en lidelse for viderekommende. Kaldt, nysnø, rustne bolter og dårlig tid. Tidspunktet skyldes dårlig planlegging. Det eneste lyspunktet er den hydrauliske jekken som løfter bilen enkelt og greit. I Figur 14.7 ser du en prinsippskisse for en hydraulisk jekk.

Siden trykket i den inkompressible væsken, typisk olje, er likt på overflaten, kan jeg bruke en relativt liten kraft på en liten flate (stempel)  $A_1$  og sørge for en større kraft på flaten  $A_2$  som løfter bilen.

$$p_0 = \frac{F_0}{A_0} = p_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad (14.23)$$

$$F_0 = \frac{A_0}{A_1} F_1 \quad (14.24)$$

Prisen jeg betaler for den økte kraften på bilen er at jeg må jekke stempelet lenger ned enn bilen stiger opp. Vi var jo borte i samme type problemstilling med taljer. Jeg må fortrenge det samme volumet som bilen løftes med:

$$A_1 d_1 = A_0 d_0 \quad (14.25)$$

Selv om det virker som trylling, er arbeidet som de to kreftene utfører likt, som seg hør og bør i en fysikkbok:

$$F_0 d_0 = \left( \frac{A_0}{A_1} F_1 \right) \left( \frac{A_1}{A_0} d_1 \right) = F_1 d_1 \quad (14.26)$$

Andre anvendelser? Jeg har prøvd å glemme vannvateren. Den kan brukes til å måle lik høyde på store avstander. Den består av en gjennomsiktig slange fylt med vann. Min frue og jeg brukte en slik da vi skulle måle høyder på vår fremtidige hyttegrunnmur.

Vårt problem var at vi fikk vannbobler i slangen, og da ble tettheten i slangen variabel og høydene vi målte forskjellig fra gang til gang. Det var det nærmeste vi kom skilsmisse.

Hva med oppdriften i vann? La oss ta min datters ballong ned i vannet:

$$O = \rho_{\text{vann}} Vg = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,065 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 637 \text{ N} \quad (14.27)$$

Ved å sammenligne (14.27) med (14.2) ser vi at oppdriften i vann er vesentlig større enn i luft. Forholdet mellom oppdrift i to medier er gitt av forskjellen i tetthet:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (14.28)$$

$$\frac{\rho_{\text{vann}}}{\rho_{\text{atmosfære ved bakken}}} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3}{1,2 \text{ kg/m}^3} = 833 \quad (14.29)$$

Da jeg var liten, syntes jeg det var et mysterium at båter bygget av materialer tyngre enn vann kunne flyte. Senere har jeg lært at så lenge den klarer å trenge bort vekten av mer vann enn den selv veier, vil den flyte. Et skrog med indre hulrom hjelper. Dersom vi har en tørr trekubbe av furu på 10 kubikkcentimeter, hvor stor del av den vil være over vann?

Vekt av furukloss:

$$\rho_{\text{furu}} V_{\text{kloss}} = 0,53 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 1 \text{ dm}^3 = 0,53 \text{ kg} \quad (14.30)$$

Vekten av den fortrengete væskemengden må være den samme:

$$\rho_{\text{vann}} V_{\text{fortrengt vann}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot x \cdot 1 \cdot 1 \text{ dm}^3 = 0,53 \text{ kg}; x = 0,53 \quad (14.31)$$

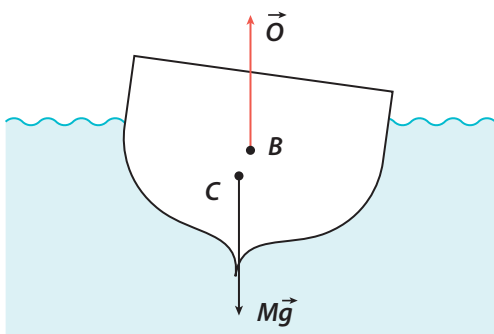
Siden furuklossens sider er 10 centimeter, vil klossen være 5,3 centimeter nede i vannet og 4,7 centimeter over vannet.



**Figur 14.8** Sild som fjerter for å styre oppdriften

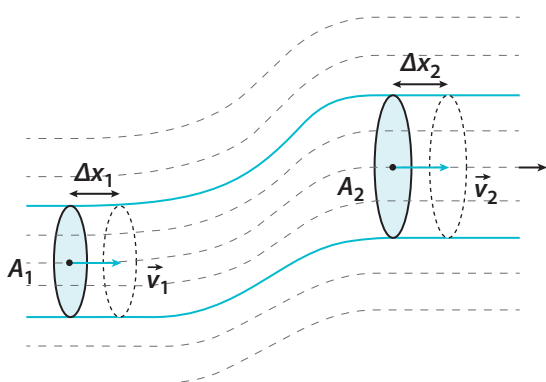
Finnes det andre ting som svirrer rundt i vannet? Hele havet er full av fisk. Hvordan kan de klare å holde seg i ro på en gitt dybde? Vel, for bunnfiskene er livet enkelt, da de ikke trenger noen oppdrift. De andre fiskene har svømmeblærer. Svømmeblæren er en del av tarmsystemet og får sitt innhold fra oksyngengass som tas opp fra blodet. Det finnes to typer svømmeblærer, en lukket og en som kan avgi gass til tarmsystemet.

Har du noen gang fisket uer? Det er ikke noe vakkert syn. Den kommer opp med sprengt kropp og øyer på stilk. Den har lukket svømmeblære og klarer ikke å utligne trykket fort nok. Sild derimot er like pen når den trekkes over ripen, da den har åpen svømmeblære. Dersom du ser ned i sjøen, vil du se gassbobler som silden, Figur 14.8, har avgitt på veien opp mot sin ublide skjebne. Andre fisker som for eksempel makrell og hai har ingen svømmeblære og er dømt til å svømme hele livet. Hva med ubåter? Hvordan klarer de å variere oppdriften? De har ballasttanker som kan fylles vann når en ønsker å synke til en gitt dybde, og dersom en ønsker å stige igjen, brukes komprimert luft til å blåse vann ut av ballasttankene igjen. Det er en av mange ulike måter en ubåt kan realisere varierende oppdrift på. I tillegg har ubåter et avansert system av trimtanker som sørger for å holde dem i ønsket vinkel i vannet. Bare noe så enkelt som et dobesøk kan resultere i en ørliten trimming.



**Figur 14.9** Båt der massesenteret C ligger under oppdriftssenteret B

Nå gjelder det å sitte stille i båten. Det er gjerne omkvedet ved store organisasjonsendringer, og kommer fra vår felles erfaring som båtfarende folk. Vi vet intuitivt at en seilbåt er vesentlig mer stabil enn en eskimokajakk. Årsaken til det er at seilbåten har et tyngdepunkt som ligger lavere enn kajakkens. Dersom en båt har sitt tyngdepunkt lavere enn tyngdepunktet til den fortrenkte væskemengde (kalt oppdriftssenteret), vil den være stabil. Skulle båten krenge, vil oppdriften sørge for et kraftmoment omkring massesenteret som får den til å rette seg opp igjen, Figur 14.9.



**Figur 14.10** Stasjonær strøm

Hittil har vi sett på væsker og gasser i ro. Hva skjer når de beveger seg? Det er hva fluid dynamikk dreier seg om. Vi skal innskrenke oss til å se på bevegelse av væsker og inkompressible gasser. Du synes kanskje at inkompressibel gass høres litt rart ut, men dersom gassens trykk varierer lite, kan en anse en gass for å være ikke sammentrykkbar.

Se for deg en elv. Strømmen i den er stasjonær. Stasjonær betyr at den for et hvilket som helst gitt punkt i strømmen ikke endrer verdi med tiden. En stasjonær strøm vil derimot kunne endre hastighet fra et sted til et annet, slik som for eksempel en elv gjør. Figur 14.10 viser en stasjonær strøm.

Ser vi på massene som forflyttes i den stasjonære strømrøret, vil de være like i de to punktene i Figur 14.7, da ingen masse fjernes:

$$\Delta m = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \quad (14.32)$$

Siden fluidet er inkompressibelt, er:

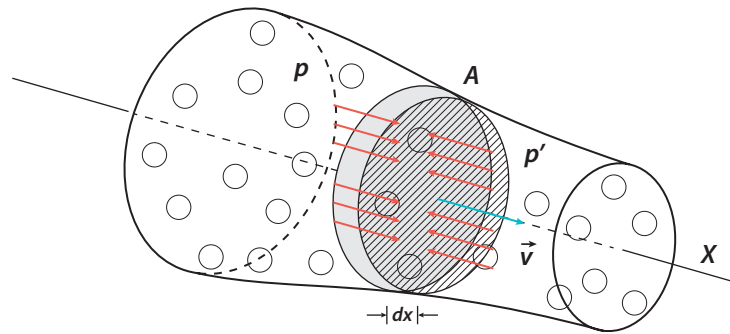
$$\rho = \rho_1 = \rho_2 = \text{konstant} \quad (14.33)$$

For fluid har en altså følgende:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (14.34)$$

Dette kalles for kontinuitetsligningen. Det som kommer inn, må selvsagt komme ut, uten at noe blir borte på veien. Der hvor arealet er lite, blir hastigheten stor, og vice versa. Det har du sikkert sett i elver hvor vannet beveger seg raskere i trange enn i åpne partier.

La oss nå se på et homogent fluid som flyter i et rør, Figur 14.11.



**Figur 14.11** Rør fylt med et fluid

Kreftene som virker på det skraverte området, er gitt ved:

$$dF_x = -p'A + pA = -(p' - p)A \quad (14.35)$$

Da  $p' - p$  er trykkdifferansen mellom to punkter separert med avstanden  $dx$ , kan en skrive  $dp = p' - p$  som gir:

$$dF_x = -dpA = -\frac{dp}{dx}(Adx) \quad (14.36)$$

Siden  $Adx$  er volumet til det skraverte området, finner en at kraften per volumenhet på grunn av trykket blir:

$$f_p = \frac{dF_x}{Adx} = -\frac{dp}{dx} \quad (14.37)$$

Vi ser av ligning (14.37) at trykket  $p$  kan tolkes som potensiell energi per volumenhet. I tillegg til trykket kan det være andre ytre krefter såsom gravitasjon som virker på væsken eller gassen. Resultantkraften for et volumelement blir dermed:

$$(f_p + f_y)Adx = \left(-\frac{dp}{dx} + f_y\right)Adx \quad (14.38)$$

Da er det bare å finne frem Newtons andre lov,  $F = ma$ , og skrive opp bevegelsesligningen:

$$(\rho Adx) \frac{d^2x}{dt^2} = (\rho Adx) \frac{dv}{dt} = \left(-\frac{dp}{dx} + f_y\right)Adx \quad (14.39)$$

Ved å kansellere  $Adx$  får en:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} + f_y \quad (14.40)$$

Dersom den ytre kraften  $f_y$  er konservativ, slik de fleste krefter er, har en  $f_y = -\frac{dE_p}{dx}$ .  $E_p$  er da den potensielle energi per volumenhet som skyldes den ytre kraften. Dette kan nå sammenfattes til:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{d}{dx}(p + E_p) \quad (14.41)$$

$\rho$  er tettheten til fluidet.

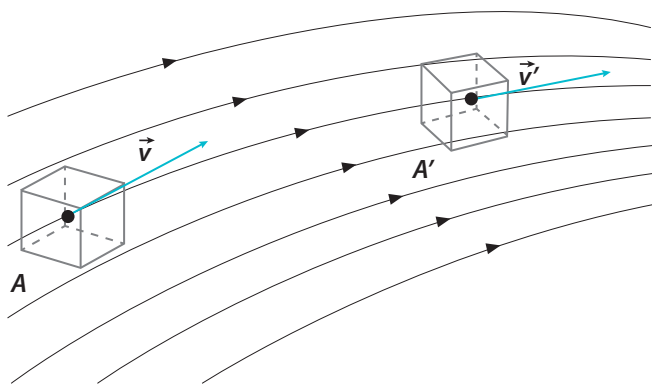


Fig 14.12 Stasjonær strøm

For å komme videre til Bernoullis ligning, må vi innskrenke oss til å se på stasjonære strømmer. I slike stasjonære strømmer kan hastigheten variere fra punkt til punkt, men være den samme hele tiden i et hvilket som helst punkt. En rolig flytende elv er et eksempel på en stasjonær strøm. Figur 14.12 viser en stasjonær strøm. Linjene som er tegnet inn viser strømlinjene væsken eller gassen følger.

I vårt tilfelle følger strømmen  $x$ -aksen og vil bare forandre seg langs den og ikke med tiden. Vi kan derfor omforme akselerasjonen:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \quad (14.42)$$

Da kan vi gå videre:

$$\rho \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -\frac{d}{dx} (p + E_p) \quad (14.43)$$



Antar vi at fluidet er inkompressibelt, dvs.  $\rho$  er konstant, har en:

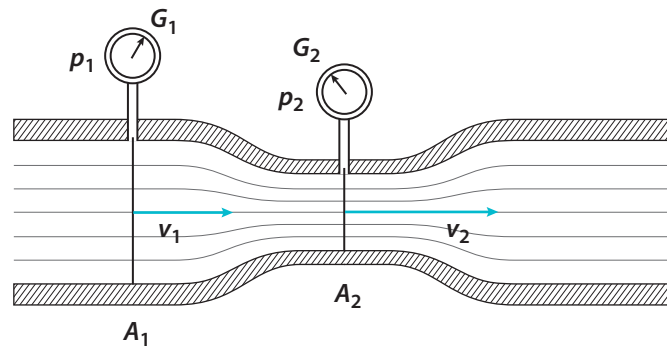
$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p + E_p \right) = 0 \quad (14.44)$$

Integrerer vi opp dette får vi en energiligning for fluid som kalles Bernoullis ligning:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + E_p = \text{konstant} \quad (14.45)$$

Denne ligningen beskriver energibevaring. Det første leddet er den kinetiske energien, det andre den potensielle energien representert ved trykket, og det siste leddet er potensiell energi på grunn av ytre krefter. Alt per volumenhet.

Hva med en anvendelse? I Figur 14.13 er det vist et såkalt venturirør som kan brukes til å måle fart og mengde til fluid i røret ved å nytte kontinuitetsligningen og Bernoullis ligning.



**Figur 14.13** Venturirør

Figur 14.13 viser en prinsippskisse av et slikt rør hvor trykkmålerne  $G_1$  og  $G_2$  henholdsvis måler trykket i røret og i dets innsnevring.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (14.46)$$

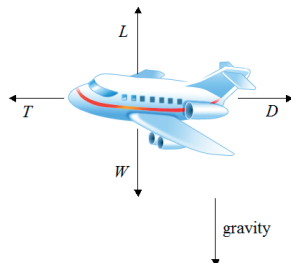
$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 \quad (14.47)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}} \quad (14.48)$$

Mengden fluid per tidsenhet som passerer i røret finner ved å multiplisere  $v_1$  med arealet  $A_1$ :

$$V = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} = K \sqrt{p_1 - p_2} \quad (14.49)$$

Her er  $K$  en konstant som avhenger av røret og naturen til fluidet.



**Figur 14.14** Fly med krefter inntegnet

Du har kanskje ikke tenkt på det, men når du flyr, så sitter du inne i en maskin som flyter i luft. Luft kan anses som en væske. Hvordan er det mulig å få et stort fly til å fly? At det er mulig, ser jeg ved daglige overflygninger av mitt hus som ligger i nærheten av en flyplass. Det som trengs, er vinger, motorer og litt kjennskap til fysikk. Motorene sørger for kraft fremover, og vingene gir løft og drag. Løft  $\vec{L}$  er en kraft som virker normalt på luftstrømmen, og draget  $\vec{D}$  er en kraft som virker langs luftstrømmen. Draget hindrer flyets fremdrift. Kraften fremover kalt «Thrust» er kraften fra motorene. Se Figur 14.14.

Det finnes to forenklete måter å forklare hvordan løftet virker på. Den første anvender Newtons lover. Når luften treffer vingen, vil luften presses nedover. Luften vil da akselereres nedover, og dermed virker det en kraft, Newtons andre lov, fra vingen på luften. Luften vil på grunn av Newtons tredje lov virke på flyet med en motsatt kraft av samme størrelse og sørge for å gi løft.

En annen måte å se det hele på er å anvende Bernoullis ligning:

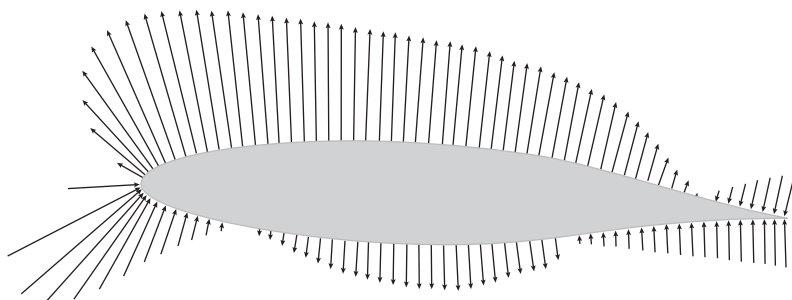
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + E_p = \text{konstant} \quad (14.50)$$

I dette tilfellet er den potensielle energien  $E_p = \rho g z$ , og en får:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{konstant} \quad (14.51)$$

Dersom vi flyr vertikalt i luften, vil  $z$  være konstant, og vi har da:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konstant} \quad (14.52)$$



Jo høyere fart, jo mindre trykk og vice versa. Ved å konstruere vingen slik at farten over vingen blir større enn farten under vingen, vil trykket bli større under enn over vingen og dermed sørge for løft, se Figur 14.15.

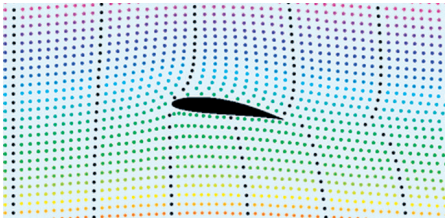
**Figur 14.15** Trykkfordeling rundt en vinge. De tynne pilene viser størrelsen på trykket ved vingeprofilen. Pilene peker i retning mot større trykk, og lengden på pilenes retning angir størrelsen i trykkforskjell med trykket langt unna vingeprofilen.

Dersom  $A$  er arealet til vingen, vil kraften oppover være:

$$F = A(p_1 - p_2) \quad (14.53)$$

Ved å sette inn Bernoullis ligning får en:

$$F = \frac{1}{2}A\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad (14.54)$$



**Figur 14.16** Flyvinge med lufthastigheter

Senket 1 og 2 referer til henholdsvis under og over vingen. Utfordringen er at Bernoulli ikke forteller oss noe om luftens hastighet over eller under vingen. Det kan vi finne ved hjelp av eksperimenter eller mer avansert teori. I Figur 14.16 er det vist en typisk fordeling av lufthastighet rundt en vinge når flyet stiger. Tidsintervallet mellom de mørke prikkene er likt.

Ved å studere Figur 14.16 ser en at en tilnærmedesvis har:

$$v \approx \frac{10,2}{13}v_2 \approx \frac{10,2}{6,5}v_1 \quad (14.55)$$

Her er  $v$  hastigheten til luftstrømmen flyet møter. Ved å sette dette inn i løftligningen får en:

$$F = \frac{1}{2}A\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}A\rho\left(\frac{169}{104}v_1^2 - \frac{42,3}{104}v_1^2\right) = \frac{1}{2}A\rho v_1^2 \cdot 1,2 \quad (14.56)$$

Dersom en finner frem en bok i flyfysikk, vil en finne følgende formel for løft:

$$F = \frac{1}{2}A\rho v^2 C_L \quad (14.57)$$

Den er jo fascinerende lik den vi har kommet frem til. Her kalles  $C_L$  for løftkoeffisienten og er avhengig av vingens form og vinkelen mellom vingen og luftstrømmen flyet møter, angrepsvinkelen. Jo større vinkel, jo større løftkoeffisient inntil flyet «staller». «Stalling» skyldes turbulens som dannes på oversiden av vingen ved for stor angrepsvinkel. Turbulensen reduserer løftet radikalt. Typisk løftkoeffisient ved «takeoff» for et moderne passasjerfly er 2 til 2,5.

Alt dette er vel og bra, men hva med et eksempel? Hva skal til for å få en Boeing 737-800 i luften? La oss prøve å finne frem til kjente størrelser med litt googling. Luftens tetthet ved bakken er  $1,2 \text{ kg/m}^3$ . Flyet veier cirka 70 000 kg, har et vingereale på  $124,6 \text{ m}^2$  og tar av med  $250 \text{ km/t} = 69,4 \text{ m/s}$ .

$$F = \frac{1}{2}A\rho v^2 C_L \quad (14.58)$$

$$F = \frac{1}{2}124,6 \text{ m}^2 \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 69,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 69,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 = 720.142 \text{ N} \quad (14.59)$$



**Figur 14.17** Boeing 737-800 ved «takeoff»

Her er  $\alpha$  en eksponent som vi foreløpig ikke har bestemt. Kraften som virker på deg, blir også større jo større hastigheten er:

Dette er mer enn tilstrekkelig for å løfte flyet på 70 000 kg fra bakken. Figur 14.17 viser en Boeing 737-800 ved «takeoff».

Hva med draget? Har du det? Er det mulig å utlede et uttrykk for det? La oss starte med egne erfaringer. Når du sykler, merker du luftmotstand, og den blir mindre når du krøker deg sammen. Kraften som virker på deg, vil øker med arealet du representerer:

$$F \propto A^\alpha \quad (14.60)$$

$$F \propto A^\alpha v^\beta \quad (14.61)$$

For å få siste parameter på plass må vi stige av sykkelen og fylle tre glass med henholdsvis sirup, vann og luft. Du ser da dersom du slipper en mynt opp i glassene, at også tettheten på fluidet har noe å si for kraften som virker:

$$F = KA^\alpha v^\beta \rho^\gamma \quad (14.62)$$

Her er  $K$  en dimensjonsløs konstant. For å komme videre må vi gå i Rayleighs fotspor og drive dimensjonsanalyse. Uttrykket til høyre må også være i Newton (N). For å få det til må:

$$F = KA v^2 \rho \quad (14.63)$$

Denne motstanden (14.63) skyldes at fluidet må presses til side, og i tillegg er det friksjon mellom fluid og legeme som presser vekk fluidet. Friksjonen er som regel liten relativt til motstanden som fluidfortrengningen gir.

For å få det hele på en form som er vanlig, kan vi skrive (14.63) som:

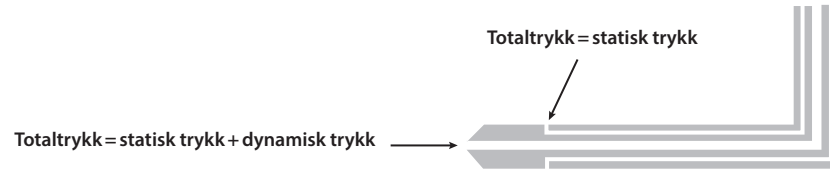
$$F = \frac{1}{2} A \rho v^2 C_D \quad (14.64)$$



**Figur 14.18** Tesla 3 med  $C_D=0,23$

$C_D$  er en konstant som kan måles, og som sier noe om hvor strømlinjet et legeme er. Jo mindre  $C_D$  er, jo mindre motstand. Det er ikke for ingenting at Tesla 3 (Figur 14.18) ser ut som en frosk.

Vel, oppe i luften kunne det vært kjekt å måle hastigheten til flyet relativt til luften. Det kan gjøres med et såkalt pitotrør som utnytter Bernoullis ligning. Figur 14.19 viser en prinsippskisse av et slikt rør.



**Figur 14.19** Pitotrør

Totaltrykket i det omsluttende røret hvor en ikke har dynamisk trykk, siden luftens fart er null der, kalles ofte for stagnasjonstrykket, og en kan skrive i henhold til Bernoullis ligning:

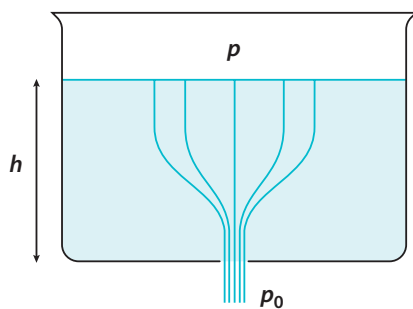
Stagnasjonstrykk = statisk trykk + dynamisk trykk

$$p_{stag} = p_s + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (14.65)$$

Ved å løse ligningen med hensyn på farten  $v$  får en:

$$v = \sqrt{\frac{(p_{stag} - p_s)}{\rho}} \quad (14.66)$$

Farten finner en altså ved å måle differansen mellom stagnasjonstrykket og det statiske trykket og ta hensyn til tettheten til atmosfæren i den gitte flyhøyden.



**Figur 14.20** Væske som strømmer ut av et kar

Snorker du? Muligens et idiotisk spørsmål siden du ikke kan høre det når du sover. Det som skjer når en snorker, er at luft går inn og ut av luftrøret med ulik fart. Ifølge Bernoullis ligning vil trykket variere med farten. Når trykket blir lavt, er farten stor og luftrøret innsnevres. Dermed reduseres luftstrømmens fart, og trykket stiger igjen. Denne variasjonen kalles det hydrodynamiske paradoks og fremkaller de herligste snorkelyder.

Vi kan også bruke Bernoulli til å finne ut hvor fort vann kan renne ut av et kar, se Figur 14.20.

Man bruker Bernoulli samt kontinuitetsligningen:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad (14.67)$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (14.68)$$

Strømhastigheten ut av bunnen av karet blir:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) + 2gh}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}} \quad (14.69)$$

Dersom karet er åpent,  $p_1 - p_2 = 0$ , og vi antar  $A_1 \gg A_2$ , får vi Torricellis lov:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (14.70)$$

Hastigheten er ikke uventet, og formelen har samme form som (9.38) som også var utledet ved hjelp av energibetraktninger.

De fluider vi har behandlet frem til nå, har vært uten indre friksjon. Alle virkelige fluider, med unntak av superflytende helium, har indre friksjon, såkalte skjærkrefter. Disse fluider kalles viskøse, og hvor stor den indre friksjonen er, angis ved viskositetskoeffisienten  $\eta$ . Jo mer tykflytende fluidet er, jo større er viskositeten. Viskositeten er temperaturavhengig, og et fluid blir typisk mindre viskøst med høyere temperatur. I Tabell 14.1 er viskositeten for noen vanlige fluider gitt.

**Tabell 14.1** Viskositet

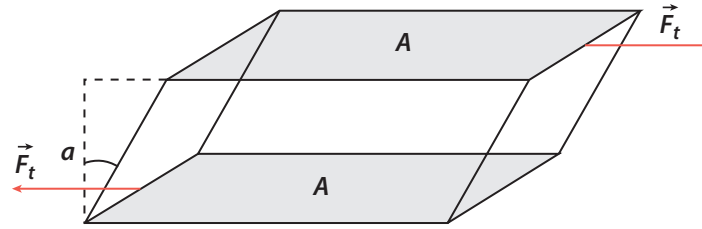
Fluid	Temperatur [°C]	Viskositet $\eta$ [Pas]
Alkohol	20	$0,12 \cdot 10^{-3}$
Glass	800	$10^6$
Kvikksølv	0	$1,2 \cdot 10^{-3}$
Smøreolje	0	5,3
Smøreolje	100	0,017
Vann	20	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Vann	100	$0,28 \cdot 10^{-3}$
Luft	20	$1,8 \cdot 10^{-5}$

Det er en empirisk kjensgjerning at:

$$\frac{F_t}{A} = \eta \frac{v_t}{a} \quad (14.71)$$

Her er  $F_t$  skjærkraften,  $v_t$  hastigheten som fluidet har, og  $a$  høyden på fluidlaget vi ser på. gitt i Figur 14.21. En væske som er som angitt av (14.71) kalles for Newtonsk. Hva

er så skjærkraft? Det er friksjon mellom lag. Dersom du for eksempel gnir håndflatene dine mot hverandre, vil du kjenne skjærkrefter mellom de to lagene som håndflatene representerer.



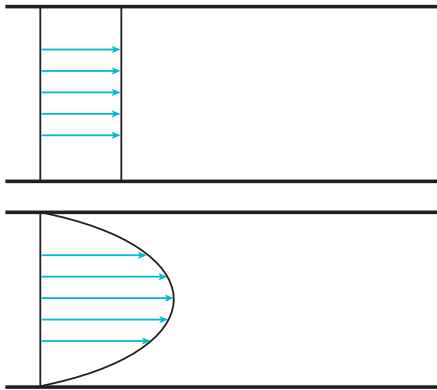
**Figur 14.21** Skjærkrefter

Skjærspenningen i fluidet er gitt ved:

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad (14.72)$$

Ser vi på et tynt fluidlag, kan vi skrive:

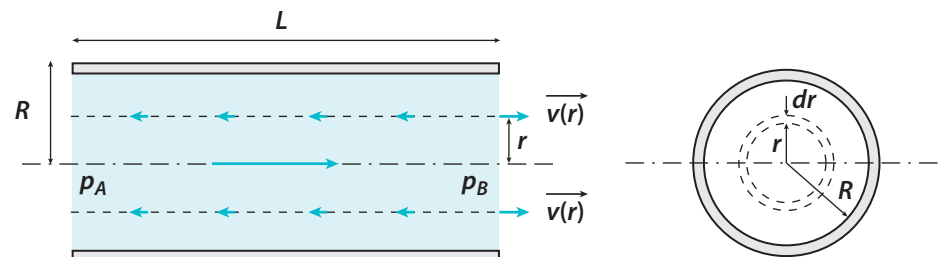
$$\eta = \frac{\tau}{\frac{dv_t}{da}} \quad (14.73)$$



I Figur 14.22 er det vist to rør. I det ene strømmer det fluid uten indre friksjon, idealfluid, og en ser at hastigheten er den samme i hele røret. Det andre røret er fylt med et viskøst fluid, og det er en hastighetsfordeling i fluidet. På grunn av vedhengskrefter (adhesjon) har fluidet minst hastighet (ingen) langs rørveggene. Fluid som har lag med forskjellig hastighet, kalles en laminær fluid.

La oss se på en laminær strøm i et rør som angitt i Figur 14.23.

**Figur 14.22** Ulike strømmer i rør



**Figur 14.23** Laminær strøm i rør

Den viskøse kraften som virker på en væskesylder med radius  $r < R$ , skyldes skjærkraften fra væskelaget utenfor. Ved å anvende (14.72), finner vi den viskøse kraften som virker på sylindere med radius  $r$ .

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| A = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}; \frac{dv}{dr} < 0 \quad (14.74)$$

For en stasjonær strøm er denne kraften lik forskjellen i krefter på endene av sylindere:

$$(p_A - p_B) \pi r^2 = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} \quad (14.75)$$

Ved å integrere opp ligningen:

$$-\int_v^0 dv = \frac{(p_A - p_B)}{2\eta L} \int_r^R r dr \quad (14.76)$$

Får vi:

$$v(r) = \frac{(p_A - p_B)}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (14.77)$$

Som en ser av ligning (14.77), får man en parabolisk hastighetsfordeling i røret med maksimal hastighet i midten:

$$v_{maks} = v(0) = \frac{(p_A - p_B) R^2}{4\eta L} \quad (14.78)$$

For å finne volumet av fluid som strømmer, volumstrømmen  $q_v$ , gjennom røret må en integrere hastigheten multiplisert med arealet:

$$q_v = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{(p_A - p_B) \pi}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4 (p_A - p_B)}{8\eta L} = \pi R^2 \frac{v_{maks}}{2} \quad (14.79)$$

Dersom en ønsker å finne massestrømmen, må en multiplisere med tettheten  $\rho$ .

Ligning (14.79) kan også omformes til:

$$p_A - p_B = \left( \frac{8\eta L}{\pi R^4} \right) q_v \quad (14.80)$$

Dette er Poiseuilles lov. Trykkdifferansen er proporsjonal med volumstrømmen  $q_v$ . Proporsjonalitetskonstanten  $\frac{8\eta L}{\pi R^4}$  oppfattes som strømningsmotstand. Strømningsmotstanden blir større jo mer viskøst fluidet er, jo lengre røret er og jo tynnere det er. De som har hatt gleden å bale med Ohms lov, ser at Poiseuilles lov er temmelig ekvivalent.  $p_A - p_B$  er jo potensialforskjell,  $q_v$  strøm og  $\frac{8\eta L}{\pi R^4}$  motstand.



Som vi ser av Poiseuilles lov, blir strømningsmotstanden større jo større viskositeten er. Hvordan kan det da ha seg at dagens ubåter går raskere under vann enn på overflaten? En skulle jo tro at når deler av ubåten var oppe i luft som er vesentlig mindre viskøs enn vann, så skulle motstanden, draget, bli mindre. For å få et raskt svar er det bare å ringe min bror som tidligere i livet var på ubåt. «Du skjønner, dagens ubåter er laget for å være under vannet, og skroget er derfor formet slik at de får minst mulig motstand i neddykket tilstand, nærmest modellert som en fisk. Det gjør dem dårlige som overflatefartøy. De presser ekstreme mengder vann under seg og skaper turbulens på sidene i oppdykket tilstand, og hvor mye energi som det krever, ser vi på de store bølgene som lages. Det gir mindre fart på overflaten. De tyske ubåtene under annen verdenskrig derimot var mer formet som overflatefartøy med evne til å dykke. Strategien var å kjøre raskt i overflatestilling til byttet og enten torpedere det fra overflatestilling eller litt neddykket. Fly med radar tok etter hvert knekken på denne strategien, og det endret ubåtenes form for alltid».

Hva er mest effektivt av en stor eller en liten båt? Rent intuitivt kunne en tenke seg at en liten båt var best. Skrogefarten er den maksimale fart en båt kan ha før økt motor-kraft bare resulterer i mer bølger og ikke mer fart. Skrogefarten er proporsjonal med kvadratroten av båtens lengde, så lenge båten ikke planer:

$$v \propto \sqrt{L} \quad (14.81)$$

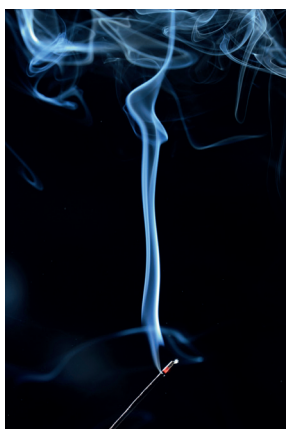
I Figur 14.24 ser en henholdsvis en stor og en liten båt, og Tabell 14.2 viser deres verdier og ytelser. Vi ser at den store båten bruker tilnærmet halvparten av effekten per tonn selv med mye større fart enn den lille båten.



Figur 14.24 Stor og liten båt

Tabell 14.2 Stor og liten båt

	Stor båt	Liten båt	Forhold	Kommentar
Lengde [m]	72	9	8	
Max fart [knop]	17	6,5	2,6	Skrogefart er proporsjonal med lengde ifølge teori; $v \propto \sqrt{L}$ . $\frac{v_s}{v_l} \propto \sqrt{\frac{L_s}{L_l}} = \sqrt{\frac{72}{9}} = 2,8$
Vekt [tonn]	3500	4,5	778	
Effekt [kW]	6000	14,5	414	
Effekt per tonn [kW/tonn]	1,7	3,2		Større båt går fortere med mindre motorisering



Figur 14.25 Turbulens

«Smokin, smokin, is good for the brain». Mulig det, men ikke helt sunt for resten av kroppen. Reggaegruppen Inner Circles gladsang renner meg i hu idet jeg tenner en sigar i vitenskapens tjeneste. Røyken stiger med stadig økende hastighet på grunn av oppdriften som den varme luften gir. Til å begynne med er luftstrømmen med røyk laminær, men ved en kritisk hastighet  $v_k$  går strømmen plutselig over til å bli kaotisk, turbulent, se Figur 14.25.

Forklaringen på dette fenomenet er fremdeles upløyd mark som det til og med går an å tjene gode penger på, 1 million dollar fra Clay Mathematics, for den som først klarer å forklare det. Ønsker du å gå løs på problemet, må du forlate Bernoullis ligning som var utledet basert på en rekke forutsetninger som stasjonær strøm og ingen indre friksjon. Isteden må en bruke den såkalte Navier-Stokes ligningen som er fluiddynamikkens svar på Newtons andre lov. Problemet med Navier-Stokes er at den leder til ulineære differensialligninger hvor kun små endringer i startbetingelser kan føre til høyst ulike resultater og dermed kaos som er vanskelig å beskrive. Den såkalte sommerfugleeffekten. Kaos kan virke uforutsigbart, men er det ikke. Det er bare utfordringene med å måle eksakte startbetingelser som gjør det tilsynelatende kaotisk.

Det er ingen grunn til fortvilelse. Selv om den turbulente oppførselen er vanskelig å beskrive, er det mulig å si noe om når og hvordan den oppstår. Fra mitt enkle eksperiment med sigar ser vi at sannsynligheten for turbulens øker med hastigheten mellom ulike fluidlag. Den varme luften stiger med økende fart relativt til den kalde luften rundt. Siden luften er viskøs, vil det være skjærkrefter mellom fluidlagene. Det er skjærkreftene som er opphav til turbulens, og deres påvirkning på fluidstrømmene vil øke med deres relative hastigheter. Dersom du ikke ønsker å begynne å røyke, er det bare å ta en tur på kjøkkenet og finne vannkranen. Start med å åpne den helt. Da er farten på vannstrålen så stor at strømmen er turbulent. Skru kranen langsomt igjen. Farten blir mindre, og plutselig får du en laminær strøm. Vannets fart er blitt mindre enn den kritiske.

For å få et måltall på graden av turbulens kan vi se på forskjellen mellom treghetskrefter, Newtons andre lov, og skjærkrefter. Dette dimensjonsløse forholdet kalles Reynoldstallet etter Osborne Reynolds som populariserte turbulens som fenomen.

$$R = \frac{\text{treghetskrefter}}{\text{viskøse krefter}} = \frac{ma}{\tau A} = \frac{\rho V \frac{dv_i}{dt}}{\eta \frac{dv_i}{da} A} \propto \frac{\rho d^3 \frac{dv_i}{dt}}{\eta \frac{dv_i}{da} d^2} = \frac{\rho d \frac{da}{dt}}{\eta} = \frac{\rho d \cdot v}{\eta} \quad (14.82)$$

Her er  $v$  hastighet mellom fluidlag,  $d$  diameter på fluidrør,  $\rho$  tetthet og  $\eta$  viskositeten.

Eksperimenter viser at den kritiske strømhastigheten for å få turbulens ligger i området:

$$R_k \approx 2000 - 2500 \quad (14.83)$$

Dersom  $R > R_k$  vil en få turbulens.

La oss ta et eksempel. Hva er den kritiske hastigheten for vann eller luft igjennom et rør med 2 centimeters diameter? La oss starte med å snu rundt på (14.83).

$$v_k \propto R_k \frac{\eta}{\rho d} \quad (14.84)$$

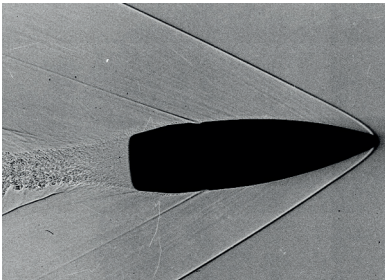
Vann:

$$v_k \propto 2000 \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2}{(1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot (0,020 \text{ m})} = 0,1 \text{ m/s} \quad (14.85)$$

Luft:

$$v_k \propto 2000 \frac{1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2}{(1,2 \text{ kg/m}^3) \cdot (0,020 \text{ m})} = 1,5 \text{ m/s} \quad (14.86)$$

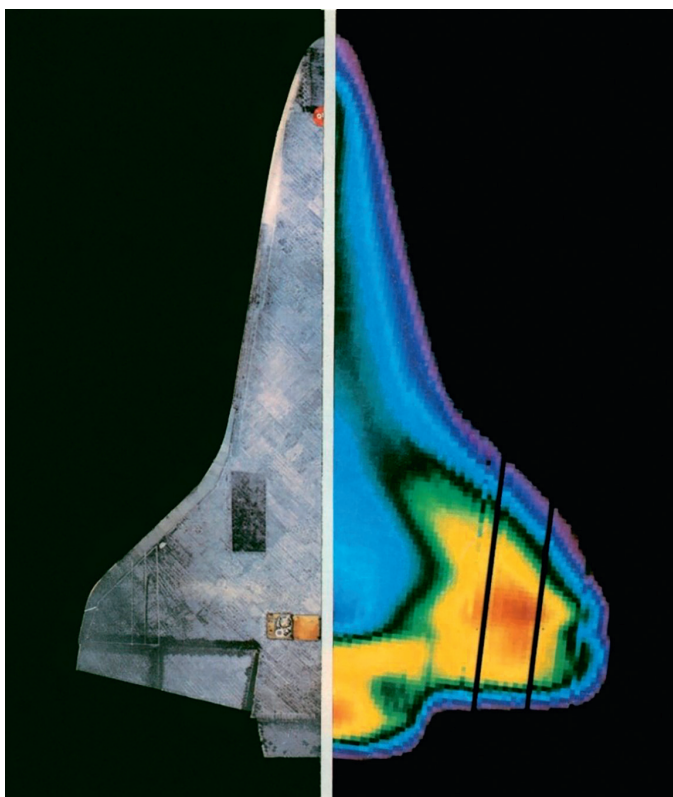
La oss til slutt se litt på kompressibel gass. Når et legeme beveger seg med liten hastighet gjennom en gass, vil gassen gli unna og omkring legemet slik som en væske gjør. Vi kan da anse gassen for å være inkompressibel uten skjærkrefter og bruke Bernoullis ligninger ved beregninger. Dersom gassens hastighet blir stor relativ til legemet som befinner seg i den, vil ikke gassen få tid til å gli unna, og den vil da bli trykket sammen foran legemet, se Figur 14.26.



**Figur 14.26** Sammentrykking av luft foran en kule som har brutt lydturen. Legg også merke til turbulensen kule lager fordi den går fort gjennom luften



**Figur 14.27** Jagerfly som bryter lydmuren



**Figur 14.28** Infrarødt bilde av undersiden av romfergen Columbia ved tilbakevending. Hastigheten var Mach 15,6 og høyden 56 kilometer da bildet ble tatt. Jo rødere, jo varmere. Varmen romfergen opplever skyldes primært trykkforandringen som sjokkbølgen gir.

Den kritiske hastigheten er lydshastigheten i gassen. Et legeme som passerer lydshastigheten, lydmuren, vil bli utsatt for helt andre krefter enn før, og motstanden øker med det flerdobbelte. Sammentrykkingen former seg som en sjokkbølge foran legemet, Figur 14.26, og vi merker denne sjokkbølgen som et kraftig smell. Det er faktisk samme slags bølger en ser som går på skrå ut til begge sider fra baugen av en båt når den har større hastighet enn bølgene. Som en kuriositet kan det nevnes at passasjerflyet Concorde ikke fikk fly med overlydsfart over land, da bøndene klaget på sjokkbølgene som knuste drivhusruter. Figur 14.27 viser to jagerfly som bryter lydmuren. På grunn av trykkforandringene i luften omkring flyene kondenserer ofte vanddampen i luften og danner flotte skyer rundt flykroppene. Dette skjer når flyet beveger seg med hastigheter i nærheten av lydens.

Ved store hastigheter angis hastigheten relativt til lydshastigheten ved hjelp av det såkalte Mach-tallet:

$$M = \frac{v}{c} \quad (14.87)$$

Her er  $v$  hastighet til legemet og  $c$  lydshastigheten.

Opptil  $M = 0,2 - 0,3$  kan en regne gassen som inkompressibel. Ved høyere Mach-tall vil gassens trykk variere, og dermed skjer det temperaturforandring. I tillegg oppstår det varme ved friksjon. Et legeme som går med høye Mach-tall, kan bli glødende og brenne opp eller fordampe. Dette er en stadig tilbakevendende bekymring for astronauter når de skal tilbake til jorden gjennom atmosfæren med høy hastighet, Figur 14.28.

# 15

## Kapittel 15

---

# Odde oppgaver

«Store oppgaver skal en begynne på, ikke tenke på.»

Julius Cæsar (100–44 fvt.)

---

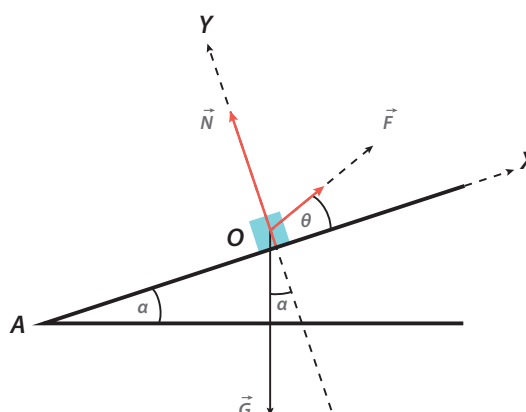
**LÆRINGSUTBYTTE:** Bruke kunnskaper til å løse oppgaver

---

I lærebøker møter man ofte teksten «Svar på odde nummererte oppgaver». Jeg fant det en smule irriterende da jeg studerte fysikk. Hvorfor? Vel, ofte var oppgavene nummerert med partall mye bedre og utfordrende. Så satt en der og lurte på om en hadde forstått den partallsnummererte oppgaven og regnet riktig. Etter at jeg selv begynte å undervise, har jeg fått vite hvorfor. Lærere får tilleggsressurser med blant annet løsningsforslag på partallsoppgavene slik at vi kan briljere overfor fortvilte studenter. Derfor har jeg nå gått til det skritt å bare gi odde nummererte oppgaver, og du skal få svar på dem alle.

### Oppgave 1

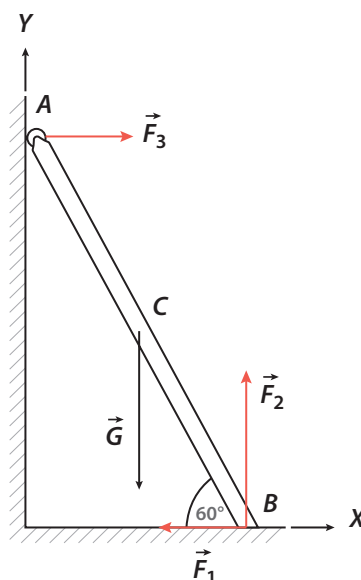
I Figur 15.1.1 ser du et legeme med tyngde  $\vec{G}$  i ro på et skråplan. Finn et uttrykk for snordraget  $\vec{F}$  og normalkraften  $\vec{N}$  som funksjon av  $\vec{G}$ ,  $\alpha$  og  $\theta$ .



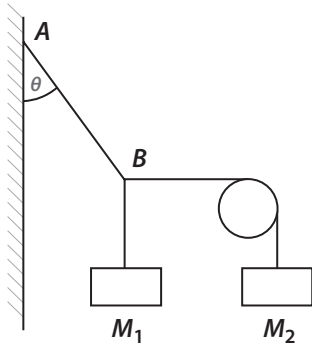
Figur 15.1.1 Legeme i ro på et skråplan

### Oppgave 3

En stige AB som veier 20 kilo hviler mot en vertikal vegg som vist i Figur 15.3.1. Vinkelen mot gulvet er 60 grader. Finn kreftene ved A og B. Stigen har hjul øverst, slik at friksjonen med den vertikale vegg er neglisjerbar.



Figur 15.3.1 Stige som hviler mot vegg



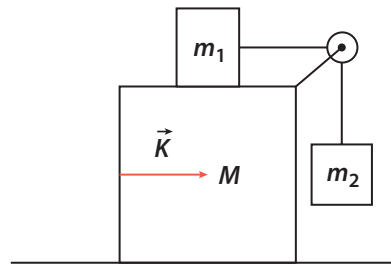
Figur 15.5.1 To lodd

**Oppgave 5**

Beregn vinkelen  $\theta$  og snordraget i snoren AB i Figur 15.5.1 dersom  $M_1=30$  kg og  $M_2=40$  kg.

**Oppgave 7**

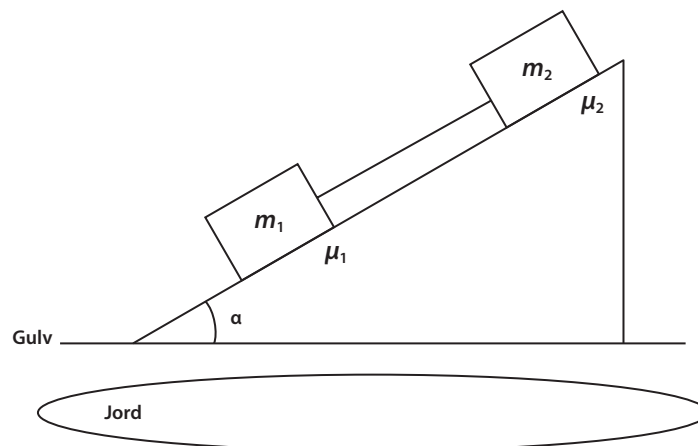
Vi lar en kraft  $\vec{K}$  virke på klossen M mot høyre i horisontal retning. Se Figur 15.7.1. Hvor stor må kraften  $\vec{K}$  være i startøyeblikket for at klossene  $m_1$  og  $m_2$  skal bli i ro relativt til den store klossen M? Vi antar at det ikke er friksjon mellom  $m_1$  og den store klossen M og heller ikke mellom M og underlaget. Trinsen og snoren er masseløse.



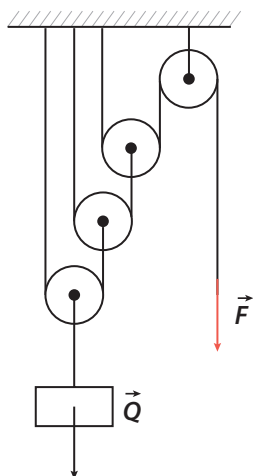
Figur 15.7.1 Snordrag i akselerasjon

**Oppgave 9**

To klosser som er forbundet med en masseløs snor, sklir nedover et skråplan med helningsvinkel  $\alpha$ . Se Figur 15.9.1. Begge klossene har samme masse  $m_1 = m_2 = m$ , men de glidende friksjonskoeffisientene er forskjellige.  $\mu_2 > \mu_1$ . Klossene sklir derfor nedover mens snoren mellom dem forblir stram. Finn uttrykk for akselerasjon, snordrag og vinkelen skråplanet må ha for at klossene skal skli med konstant fart. Positiv retning er definert nedover langs skråplanet.



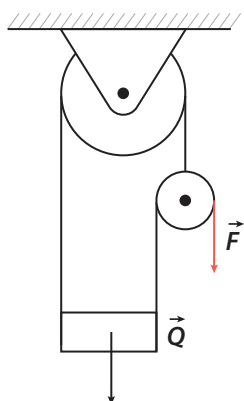
Figur 15.9.1 To klosser på et skråplan



Figur 15.11.1 Talje

**Oppgave 11**

Finn kraften  $\vec{F}$  uttrykt i tyngden  $\vec{Q}$  som trengs for å beholde disse masseløse trinsene i likevekt. Se Figur 15.11.1.



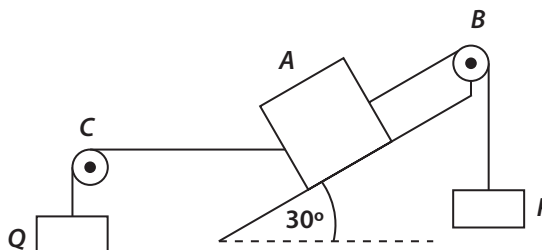
Figur 15.13.1 Talje

**Oppgave 13**

Finn kraften  $\vec{F}$  uttrykt i tyngden  $\vec{Q}$  som trengs for å beholde likevekt. Se Figur 15.13.1.

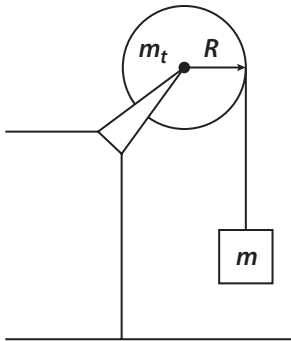
**Oppgave 15**

Beregn vekten til P som trengs for likevekt for systemet vist i Figur 15.15.1, når A er 100 kg og Q er lik 10 kg. Det er ingen friksjon, og trinsene er masseløse. Snoren AC er horisontal og AB parallell med skråplanet. Beregn også normalkraften på A.



Figur 15.15.1 Systemet som skal beregnes

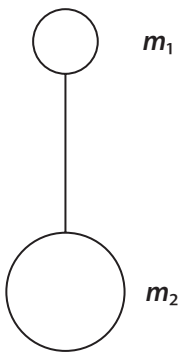




**Figur 15.17.1** Systemet som skal undersøkes

### Oppgave 17

En snor er viklet rundt en friksjonsfri trinse som har treghetsmoment  $I$  om aksen og radius  $R$ . I enden av snoren henger en kloss med masse  $m$ . Se Figur 15.17.1. Systemet slippes slik at  $m$  akselererer nedover samtidig som trinsen roterer uten at snoren glipper. Finn akselerasjonen  $a$  til klossen, trinsens vinkelakselerasjon  $\alpha$  og snordraget  $S$ .



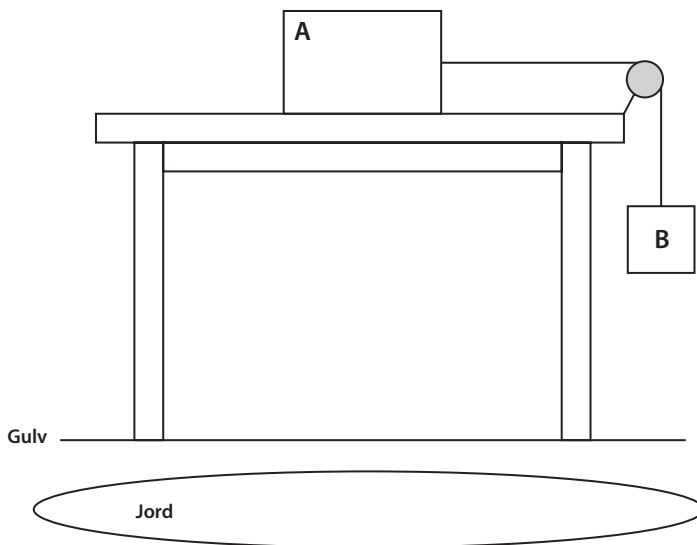
**Figur 15.19.1** Kuler i fritt fall fra det skjeve tårn i Pisa

### Oppgave 19

Vi følger i Galileo Galileis fotspor oppover i det skjeve tårn i Pisa. I hendene har vi to blykuler  $m_1$  og  $m_2$  med forskjellig masse. De er forbundet med en masseløs snor. Vi skal teste Aristoteles' teori om at tunge ting faller raskere enn lette. Aristoteles mente altså at tyngdens akselerasjon var proporsjonal med massen:

$$m = kg$$

Vi kaster ut blykulene fra 50 meters høyde i tårnet. Figur 15.19.1 viser kulene mens de faller. Siden  $m_1$  er lettere enn  $m_2$ , vil snoren strammes. Hvor stor blir akselerasjonen uttrykt i massene og tyngdens akselerasjon på den tyngste kulen, og hva blir snordraget dersom vi regner med aristotelisk fysikk? Hva er underlig med resultatet vi kommer frem til?



**Figur 15.21.1** Systemet

### Oppgave 21

Systemet i Figur 15.21.1 viser to klosser som er koblet sammen med en snor som ligger over en trinse. Friksjonskraften mellom snor og trinse er stor nok til at snoren ikke glir over trinsen, men at det er trinsen som går rundt. Vi lar systemet starte fra ro og ønsker å beregne akselerasjonen til klossene.

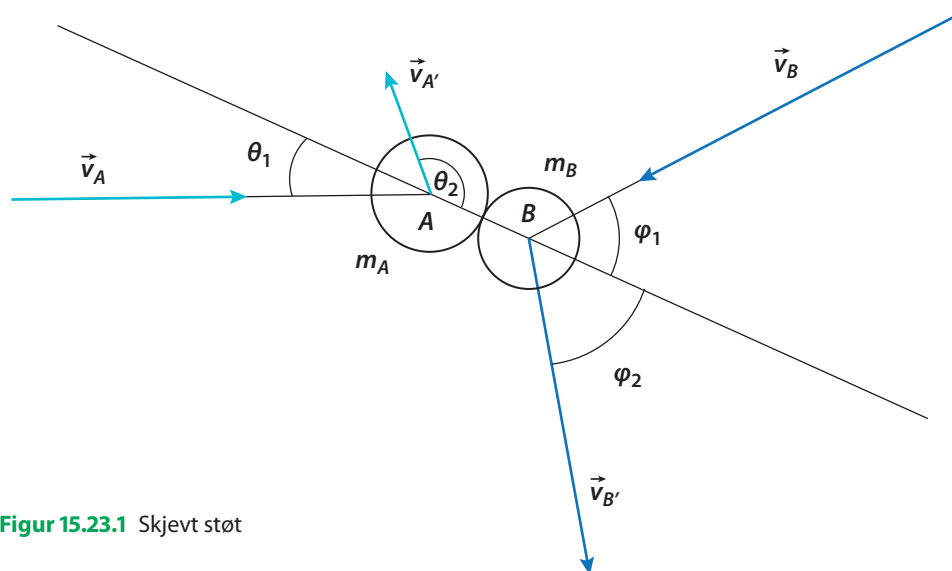
Følgende data er gitt:

Masse, klosse A på bord	1,0 kg
Masse, hengende kloss B	1,0 kg
Masse, trinse	50 gram
Radius, trinse	10 cm
Treghetsmoment trinse	$2,5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Masse, snor	2 gram
Friksjonskoeffisient kloss/bord	0,2

- a) Finn akselerasjonen dersom vi ignorerer massen til trinse og snor
- b) Er det rimelig å ignorere massen til snor og trinse? Omtrent hvor stor feil gir det at vi ignorerte disse massene i a)? Gjør feilen svaret vårt i a) for stort eller for lite?
- c) Har vi ignorert andre effekter som potensielt kan ha betydning?
- d) Hvilke av effektene vi har ignorert gir størst bidrag til feilen i beregningen vår i a)?

**Oppgave 23**

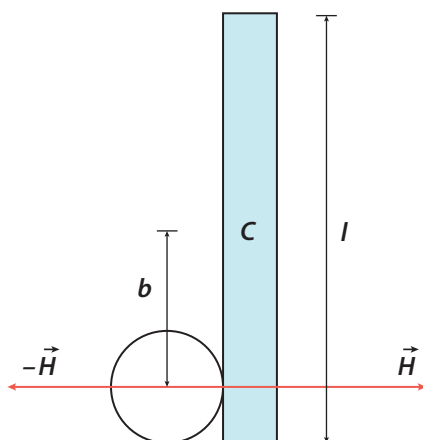
To elastiske kuler A og B støter sammen i et skjevt støt som vist i Figur 15.23.1. Kule A har en masse på 0,8 kg, og hastighetsvektoren  $\vec{v}_A$  før støtet har en skalarverdi lik 5,2 m/s og danner en vinkel på  $\theta_1 = 25^\circ$  med linjen som går gjennom kulenes massesentre. Kule B har masse 0,5 kg og danner en vinkel på  $\varphi_1 = 45^\circ$  med linjen som går gjennom kulenes massesentre. Regn ut skalarverdi og kulenes hastighetsvektor etter støtet.



Figur 15.23.1 Skjevt støt

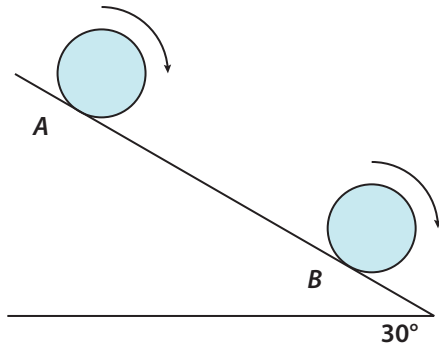
**Oppgave 25**

En stav med lengde  $l = 0,40$  m og masse  $m_{stav} = 1,0$  kg ligger på et friksjonsfritt bord. En sirkelformet skive med masse  $m_{skive} = 0,5$  kg beveger seg med fart  $v_{skive1} = 4,0$  m/s. Skiven treffer staven i et punkt  $b = 0,15$  m fra stavens massesenter. Se Figur 15.25.1. Støtet er rett, skiven vil ha samme retning etter støtet, og elastisk. Siden støtet er elastisk, er den mekaniske energien bevart.

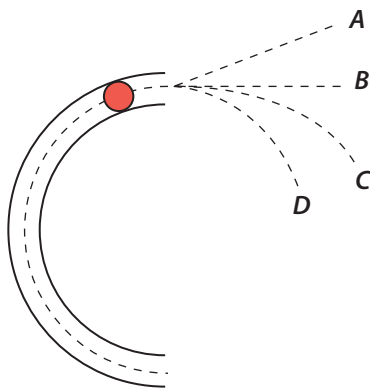


Figur 15.25.1 Ikke sentralt støt mellom skive og stav

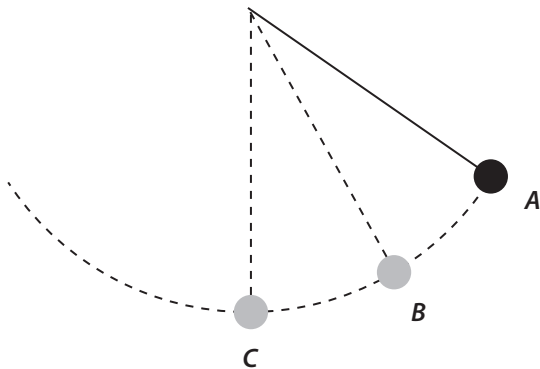
1. Hvor stor fart  $v_C$  får stavens massesenter?
2. Hvor stor vinkelhastighet  $\omega$  får staven?
3. Hvor stor fart  $v_{skive2}$  får skiven etter støtet?



Figur 15.27.1 Hjul som ruller



Figur 15.29.1 Kule i rør



Figur 15.31.1 Pendel

**Oppgave 27**

Et kompakt, homogent, jevnt tykt hjul med masse  $m = 3,0 \text{ kg}$  og radius  $6 \text{ cm}$  starter i ro i punktet A og ruller uten å gli  $2,4 \text{ m}$  nedover på et skråplan til punkt B. Skråplanet har en helningsvinkel på  $30^\circ$ . Se Figur 15.27.1.

- Tegn alle kreftene som virker på hjulet ved punkt A.
- Finn treghetsmomentet til hjulet om massesenteret.
- Finn akselerasjonen til hjulets massesenter.
- Finn vinkelakselerasjonen til hjulet.
- Hva må den statiske friksjonskoeffisienten  $\mu_s$  være for å unngå at hjulet glir?
- Finn farten til hjulets massesenter og vinkelhastigheten til hjulet ved punkt B når avstanden mellom A og B er  $2,4 \text{ m}$ .
- Hva er verdien av spinnet til hjulet (om massesenteret) når hjulet er ved punkt B?

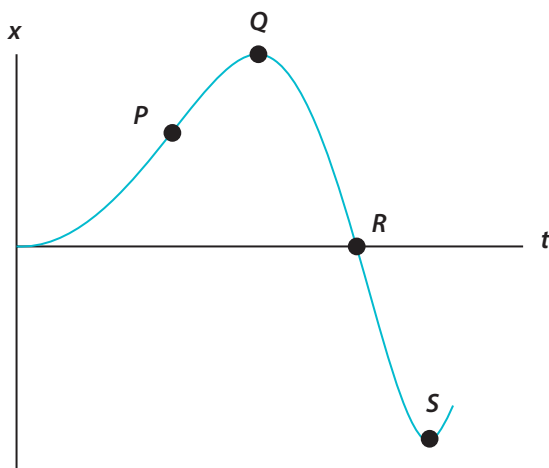
**Oppgave 29**

En kule blir sendt igjennom et rør som er formet som en halvsirkel og ligger på et flatt underlag. Hvilken bane vil kulen trille langs etter den har kommet ut av røret? Se Figur 15.29.1.

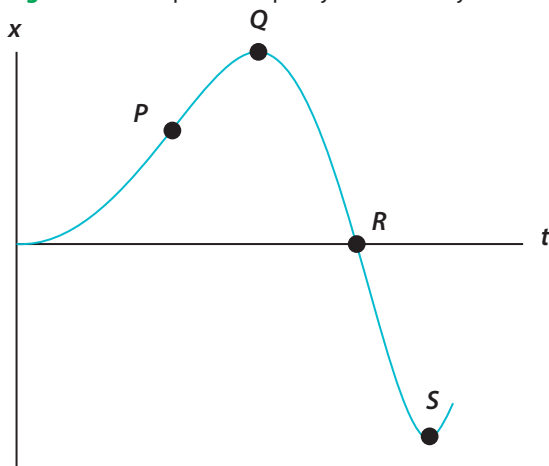
**Oppgave 31**

En pendel henger i et stativ, Figur 15.31.1, som står på en vekt og svinger frem og tilbake. Hvilket punkt er pendelen på når vekten viser mest?

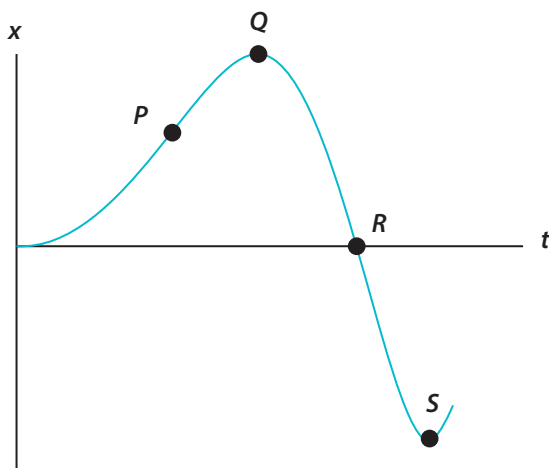
- Ved maksimalt utslag (A)
- Midt mellom maksimalt utslag og passering av bunnpunkt (B)
- Ved passering av bunnpunkt (C)
- Vekten viser det samme hele tiden



Figur 15.35.1 En partikkels posisjon som funksjon av tid



Figur 15.37.1 En partikkels posisjon som funksjon av tid



Figur 15.39.1 En partikkels posisjon som funksjon av tid

### Oppgave 33

En partikkels posisjon er gitt som funksjon av tiden  $t$ :

$$x(t) = 5,0 \text{ m/s} \cdot t$$

$$y(t) = -9,8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 + 1 \text{ m}$$

Hvilke påstander (én eller flere) er riktige?

1. Startposisjonen er i origo
2. Startfarten er 5 m/s
3. Akselerasjonen er  $-9,8 \text{ m/s}^2$
4. Akselerasjonen er ikke konstant

### Oppgave 35

En partikkel beveger seg langs en linje  $x$ . Grafen, Figur 15.35.1, viser partikkelens posisjon som funksjon av tiden.

Hva er hastigheten i punkt Q?

1.  $v < 0$
2.  $v = 0$
3.  $v > 0$

### Oppgave 37

En partikkel beveger seg langs en linje  $x$ . Grafen, Figur 15.37.1, viser partikkelens posisjon som funksjon av tiden.

Hva er akselerasjonen i punkt Q?

1.  $a < 0$
2.  $a = 0$
3.  $a > 0$

### Oppgave 39

En partikkel beveger seg langs en linje  $x$ . Grafen, Figur 15.39.1, viser partikkelens posisjon som funksjon av tiden.

Hva er gjennomsnittshastigheten fra  $t = 0$  til punkt R?

1.  $v_{gj} < 0$
2.  $v_{gj} = 0$
3.  $v_{gj} > 0$

**Oppgave 41**

En ball starter fra ro og faller fritt. La  $T_1$  være tiden det tar fra ballen starter til den er halvveis til bakken, og  $T_2$  være tiden fra den er halvveis til den treffer bakken. Hvilken påstand er riktig?

1.  $T_1 = T_2$
2.  $T_1 = (1 + \sqrt{2})T_2$
3.  $T_2 = (1 + \sqrt{2})T_1$
4.  $T_1 = 2T_2$
5.  $T_2 = 2T_1$
6.  $T_1 = T_2^2$
7.  $T_2 = T_1^2$

**Oppgave 43**

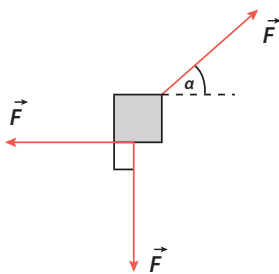
En ball beveger seg med konstant banefart i en sirkel. Hvilken påstand er riktig?

1. Ballen har null akselerasjon
2. Gjennomsnittlig hastighet for en runde er lik gjennomsnittlig banefart for samme runde
3. Ballen har konstant vinkelfrekvens
4. Ballen har konstant hastighet
5. Hvis vi kjenner banehastigheten og radien til sirkelbevegelsen, har vi nok informasjon til å regne ut akselerasjonen

**Oppgave 45**

Et tog kjører på en rett jernbane 100 km/t. En dame går inne i toget med en hastighet 3 km/t mot togets bevegelsesretning. Hvilke påstander er riktig?

1. Damens hastighet er entydig bestemt, dvs. alle observatører vil måle samme hastighet
2. Det finnes observatører som vil måle at damen har en hastighetskomponent på tvers av togets fartsretning
3. En observatør som står i ro i forhold til skinnegangen vil måle at damen har større fart enn det en observatør inne i toget måler



**Figur 15.47.1** Gjenstand som blir utsatt for krefter

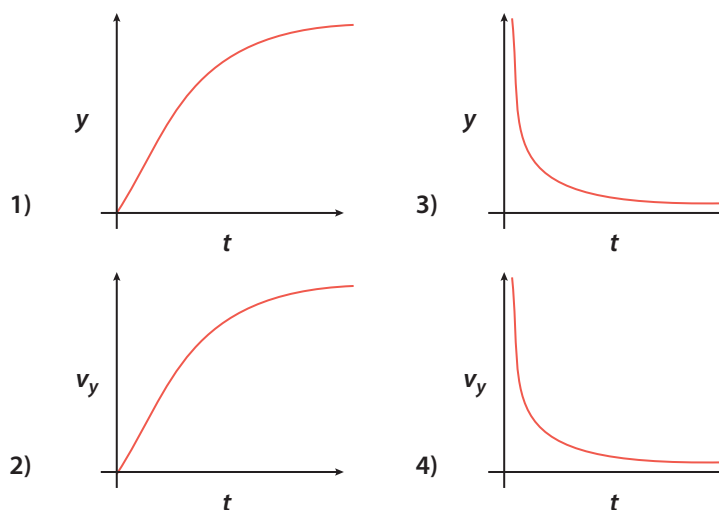
**Oppgave 47**

En gjenstand blir påvirket av tre like store krefter  $|\vec{F}|$ . Se Figur 15.47.1. To av kreftene står vinkelrett på hverandre. Den siste kraften danner en vinkel  $\alpha$  med horisontalen. Hvilken påstand er riktig?

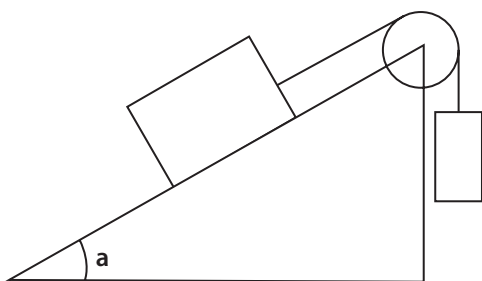
1. Det finnes en vinkel  $\alpha$  slik at gjenstanden er i ro
2. Gjenstanden vil akselerere bare for en bestemt verdi av  $\alpha$
3. Gjenstanden vil bevege seg med konstant, rettlinjert fart for en bestemt verdi av  $\alpha$
4. Gjenstanden vil akselerere for alle verdier av  $\alpha$

**Oppgave 49**

En gjenstand blir sluppet fra ro og faller mot bakken. Det virker luftmotstand på gjenstanden. Hvilken graf i Figur 15.49.1 beskriver bevegelsen best?  $y$  er posisjonen målt fra bakken og oppover,  $v_y$  er farten i vertikal retning, og  $t$  er tiden etter at vi slapp gjenstanden.



**Figur 15.49.1** Grafer for beskrivelse av bevegelse



**Figur 15.51.1** Hva skal til for at klossene er i ro?

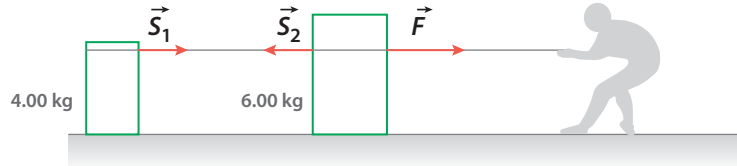
**Oppgave 51**

Klossen på skråplanet, Figur 15.51.1, har masse 1,0 kg. Klossen som henger i snoren har masse 0,5 kg. Anta at det ikke er friksjon noen steder i systemet. Hva må vinkelen  $a$  være for at klossene skal kunne ligge i ro?

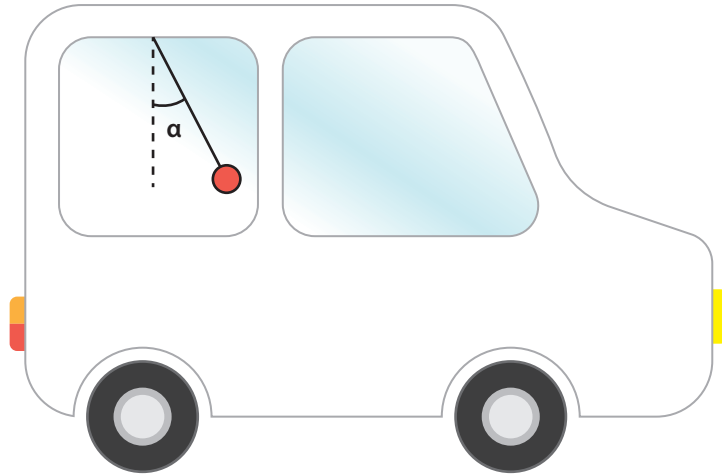
1.  $20^\circ$
2.  $30^\circ$
3.  $45^\circ$
4.  $60^\circ$
5. Ikke nok informasjon til å avgjøre

**Oppgave 53**

Klossene trekkes med en kraft  $\vec{F}$  med størrelse på 20 N. Begge klossene glir friksjonsfritt på underlaget. Hvor store er snordragene  $\vec{S}_1$  og  $\vec{S}_2$ ? Anta at tauene er masseløse.

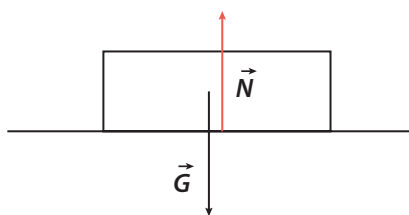
**Figur 15.53.1** Snordrag**Oppgave 55**

En bil kjører mot høyre på en rett, horisontal vei, Figur 15.55.1. I bilen henger det en pendel. Utslaget til pendelen er fremover. Vinkelen med vertikalen er konstant lik  $\alpha$ .

**Figur 15.55.1** Bil med pendel

Hvilken av påstandene om farten  $v$  og akselerasjonen  $a$  er riktig?

1. Farten  $v$  øker, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
2. Farten  $v$  øker, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
3. Farten  $v$  avtar, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
4. Farten  $v$  avtar, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

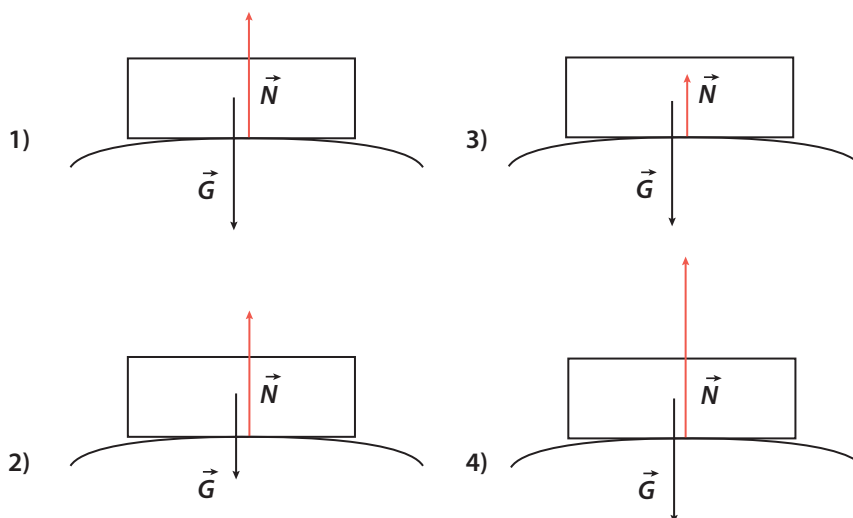


**Figur 15.57.1** Kraftene som virker på klossen

### Oppgave 57

En kloss glir uten luftmotstand på et friksjonsfritt horisontalt underlag. Figuren Figur 15.57.1 viser kreftene som virker på klossen.

Etterpå glir klossen over en bakketopp uten å miste kontakten med underlaget. Hvilket alternativ i Figur 15.57.2 viser best kreftene som virker på klossen når den passerer bakketoppen?



**Figur 15.57.2** Ulike alternativer for krefter som virker på klossen ved bakketoppen

### Oppgave 59

En buss kjører med konstant fart i en sirkelformet og horisontal sving. I bussen henger det en pendel. Pendelsnoren danner en vinkel  $u$  med vertikalen. Hva er radius i svingen?

1.  $r = \frac{g \tan(u)}{v^2}$
2.  $r = v^2 g \tan(u)$
3.  $r = \frac{v^2 \tan(u)}{g}$
4.  $r = \frac{v^2}{g \tan(u)}$



**Oppgave 61**

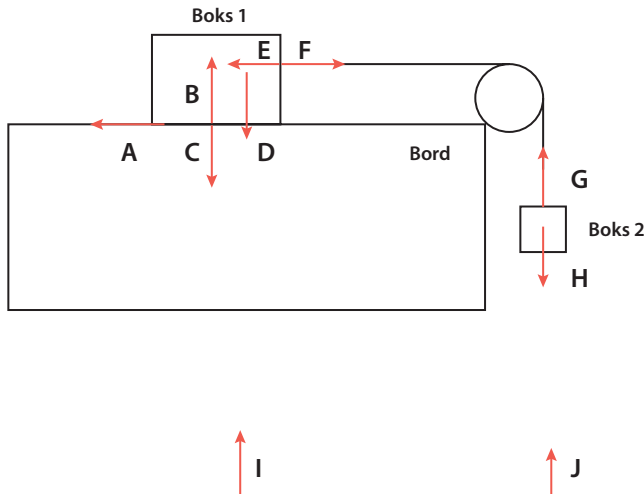
Fiktive krefter (tilsynelatende krefter som opptrer fordi referansesystemet er akselerert) har noen ganger motkrefter, mens andre ganger har de det ikke.

1. Sant
2. Usant

**Oppgave 63**

En boks står stille på et horisontalt bord. Motkraften til tyngdekraften er normalkraften, dvs. den kraften bordet virker på boksen med slik at boksen ikke faller ned.

1. Sant
2. Usant



**Figur 15.65.1** Systemet med krefter inntegnet

**Oppgave 65**

Boks 1 ligger på et bord og er forbundet med boks 2 ved hjelp av et tau som går over en trinse, Figur 15.65.1. Identifiser korrekte kraft/motkraft-par i tegningen.

Merknader:

- Ikke alle kreftene som er relevante for systemet er tegnet inn
- Angrepspunktet for enkelte krefter er forskjøvet for å øke lesbarheten
- Det kan være upresissheter i tegningen som gjør at lengden på pil for kraft og motkraft ikke er eksakt like

Beskrivelse av kreftene:

- A: Friksjonskraft som virker på boks 1
- B: Normalkraft som virker på boks 1
- C: Normalkraft som virker på bordet
- D: Tyngdekraft som virker på boks 1
- E: Trekk-kraft som boks 1 virker på tauet med
- F: Snordrag som tauet virker på boks 1 med
- G: Snordrag som tauet virker på boks 2 med
- H: Tyngdekraft som virker på boks 2
- I: Tyngdekraft som boks 1 virker på jordkloden med
- J: Tyngdekraft som boks 2 virker på jordkloden med

**Oppgave 67**

Vektløshet er synonymt med fravær av tyngdekraft.

1. Sant
2. Usant

**Oppgave 69**

En kule  $K_1$  med masse  $m$  henger i en fjær. I en snor som er festet til  $K_1$  henger det en kule  $K_2$  med masse  $2m$ . Massen til fjæren og snoren er neglisjerbar. I utgangspunktet henger kulene og fjæren i ro. Vi klipper så av snoren mellom kulene. Hva er absoluttverdien av akselerasjonen til de to kulene like etter at snoren er klippet?

1.  $a_{K_1} = 2g, a_{K_2} = g$
2.  $a_{K_1} = 2g, a_{K_2} = 2g$
3.  $a_{K_1} = 3g, a_{K_2} = g$
4.  $a_{K_1} = 3g, a_{K_2} = 2g$
5.  $a_{K_1} = g, a_{K_2} = g$

**Oppgave 71**

En ishockey puck ligger stille på is som vi kan regne som friksjonsfri. En annen, identisk puck glir rett mot den som ligger stille med fart 5,0 m/s. Hvor stor fart har den pucken som i utgangspunktet lå i ro etter at den ble truffet? Du kan regne med at ingen energi gikk tapt i kollisjonen.

**Oppgave 73**

Hvor stor startfart må du gi en ball med masse 0,20 kg for å kaste den 8 meter rett opp? Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  og se bort fra luftmotstand.

**Oppgave 75**

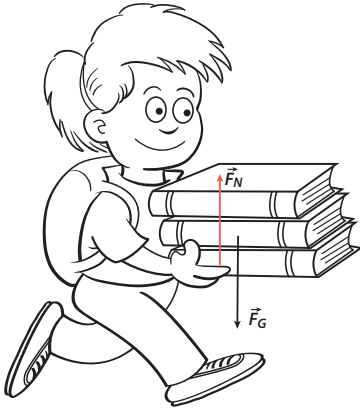
En mann står i en heis og holder en pakke med masse 1,0 kg i en snor. Hvor stort er snordraget når heisen akselerer nedover med en konstant akselerasjon  $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ ? Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Oppgave 77**

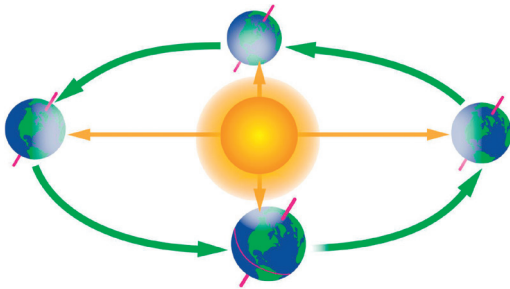
En kule med masse 2,5 kg løftes opp med jevn fart til 1,5 meter i løpet av 2 sekunder. Hvor stor effekt yter den som løfter kulen? Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Oppgave 79**

En kloss med masse 1,0 kg glir nedover et skråplan med helningsvinkel  $45^\circ$ . Friksjonskoeffisienten er  $\mu = 0,2$ . Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Hvor stor er akselerasjonen?



**Figur 15.85.1** Hvor stort er arbeidet som utføres på boken?



**Figur 15.87.1** Jorden i bane rundt solen

### Oppgave 81

En curlingstein med masse 19,0 kg som ligger i ro på isen, blir truffet av en annen curlingstein. I kollisjonen blir den første curlingsteinen tilført 38,0 J kinetisk energi. Hvor stor fart har den første steinen etter kollisjonen?

### Oppgave 83

Vi slipper en ball fra et hustak. Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken 15 meter nedenfor? Regn med tyngdeakselerasjon  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  og se bort fra luftmotstand.

### Oppgave 85

Du går på et horisontalt gulv og bærer en tung lærebok med masse 2,5 kg, Figur 15.85.1. Boken har hele tiden konstant avstand til gulvet. Hvor stort arbeid utfører du på boken når du går 10 meter med konstant hastighet 2 m/s?

### Oppgave 87

Jorden bruker 365,242 dager = 8766 timer på en runde rundt solen, se Figur 15.87.1. Banen er elliptisk med en liten eksentrisitet, men anta for enkelhets skyld at den er perfekt sirkulær. Med en radius på 149,6 millioner km får vi da en sentripetalakselerasjon  $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$ . Massen til jorden er  $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Hvor stort arbeid gjør solen på jorden for hver runde?

### Oppgave 89

En ball med masse  $m = 0,43 \text{ kg}$  faller rett ned fra 20 meter høyde. Luftmotstanden kan beskrives som  $F(v) = 0,05 \text{ kg/m} \cdot v^2$ . Regn med tyngdeakselerasjon  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

- Hvor lang tid bruker ballen på å falle de 20 meterne ned til bakken?
- Hvor stor er ballens fart i landingsøyeblikket?
- Hvor stor er ballens akselerasjon i landingsøyeblikket?
- Hvor stort arbeid utføres på ballen?

### Oppgave 91

Et prosjektil beveger seg jevnt rettlinjet. På et tidspunkt sprenges prosjektilet i to biter som flyr videre. Den ene biten har  $2/3$  av den opprinnelige massen og beveger seg mot høyre relativt til den opprinnelige bevegelsesretningen. Den andre biten har  $1/3$  av den opprinnelige massen og beveger seg mot venstre relativt til den opprinnelige bevegelsesretningen. (Hastighetsvektoren før delingen og de to hastighetsvektorene etter delingen ligger alle i samme plan.) Hvor går hastighetsvektoren til massesenteret etter at prosjektilet har delt seg?

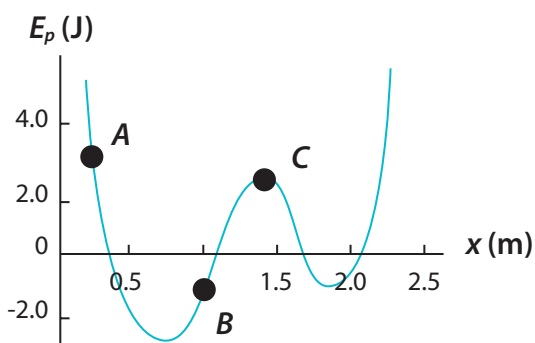
**Oppgave 93**

En kollisjon må være elastisk for at bevegelsesmengden skal være bevart.

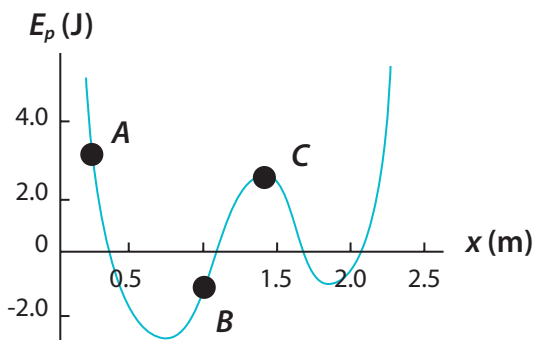
1. Sant
2. Usant

**Oppgave 95**

En ball med masse 100 g blir sluppet fra høyde 5,0 m. Den treffer gulvet og spretter opp igjen. Hvilken endring av bevegelsesmengde får ballen i sammenstøtet med bakken dersom det er en elastisk kollisjon? Se bort fra luftmotstand og regn med tyngdeakselerasjon  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .



**Figur 15.101.1** Potensiell energi som funksjon av posisjon



**Figur 15.103.1** Potensiell energi som funksjon av posisjon

**Oppgave 97**

Hvilke påstander om energi er riktig?

1. Energi er en bevart størrelse
2. Hvis energien til et objekt måles fra to inertialsystemer, vil verdien alltid være lik
3. Arbeid innebærer overføring av energi
4. Energi er en vektorstørrelse

**Oppgave 99**

Energi er bevart uavhengig av hvilke typer krefter som virker.

1. Sant
2. Usant

**Oppgave 101**

Hvis partikkelen har total mekanisk energi 4,0 J, i hvilket punkt, Figur 15.101.1, har den størst kinetisk energi?

**Oppgave 103**

Hvis partikkelen, Figur 15.103.1, starter fra punkt C, kan den da nå punkt A?

**Oppgave 105**

Kan det komme lyd fra en fullstendig elastisk kollisjon?

**Oppgave 107**

Kule 1 har masse  $m_1 = 100 \text{ g}$  og fart  $v_1 = 2 \text{ m/s}$ . Kule 2 har masse  $m_2 = 400 \text{ g}$  og fart  $v_1 = 1 \text{ m/s}$ . Hvilken kule har størst kinetisk energi?

**Oppgave 109**

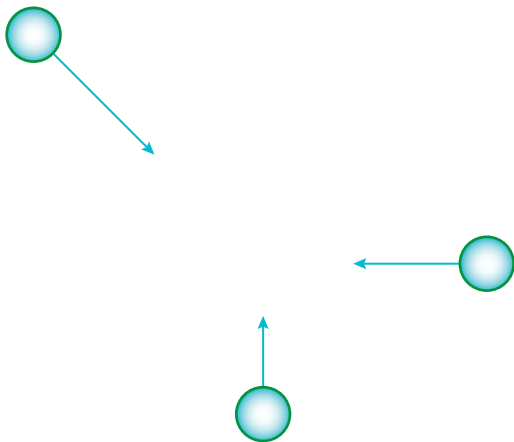
En kule beveger seg langs x-aksen med  $v_x = 2$  m/s. Den har da kinetisk energi  $E_{ki} = 0,2$  J. Ved  $x = 5$  m kolliderer den med en vegg og blir sendt tilbake, slik at den etter kollisjonen beveger seg langs x-aksen med  $v_x = -2$  m/s. Hva er den kinetiske energien,  $E_{kf}$ , etter kollisjonen?

**Oppgave 111**

To kuler kolliderer elastisk. Total bevegelsesmengde for systemet er 0, og ingen ytre krefter virker. Hva er vinkelen mellom hastighetsvektorene til kulene etter kollisjonen?

**Oppgave 113**

To kuler kolliderer elastisk. Total bevegelsesmengde for systemet er 0, og ingen ytre krefter virker. Vi velger oss en av kulene og ser på vinkelen mellom hastighetsvektor før og hastighetsvektor etter kollisjonen. Hvor stor er denne vinkelen?



**Figur 15.115.1** Tre kuler som kolliderer

**Oppgave 115**

Tre kuler kolliderer i et punkt og blir hengende sammen etter kollisjonen. Ingen ytre krefter virker på kulene. Figuren, Figur 15.115.1, er kun for illustrasjon. Ikke ta hensyn til verken lengde eller vinkel på vektorene som er vist på figuren når du tar stilling til påstandene.

Hvilke påstander er riktige?

1. Kollisjonen er elastisk.
2. I inertialsystemet der kulene ligger i ro etter kollisjonen, er massesenteret i ro også før kollisjonen.
3. I inertialsystemet der kulene ligger i ro etter kollisjonen, må absoluttverdien av bevegelsesmengde til de tre kulene før kollisjonen være lik.
4. Det finnes et inertialsystem der massesenteret har akselerasjon ulik null.

**Oppgave 117**

Vi ser på et system bestående av et antall punktmasser,  $m_1, m_2, \dots$ . La  $M = \sum_i m_i$  være summen av alle massene og  $\vec{P}$  være den totale bevegelsesmengden.  $\sum \vec{F}_{int}$  er summen av krefter som virker mellom partikler i systemet, mens  $\sum \vec{F}_{ext}$  er summen av eksterne krefter som virker på partikler i systemet. Ved summering over indre eller eksterne krefter, anta at summen går over alle krefter av den arten. Størrelser merket med CoM gjelder massesenteret.

Hvilke ligninger er riktig?

1.  $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$
2.  $\sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int} = \frac{d\vec{P}}{dt}$
3.  $\sum |\vec{F}_{ext}| = M|\vec{a}_{CoM}|$
4.  $\vec{P} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots$
5.  $\vec{a}_{CoM} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots$

### Oppgave 119

Hvilke påstander om potensiell energi er riktig?

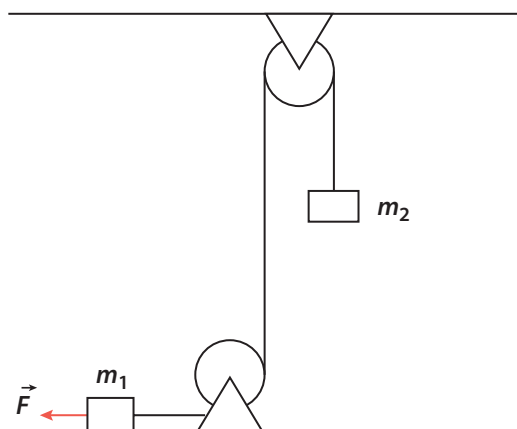
1. Så lenge det kun er konservative krefter, er den potensielle energien unikt bestemt av posisjonen til et objekt (eventuelt flere objekter).
2. Potensiell energi er en vektorstørrelse.
3. Hvis kun konservative krefter virker og den potensielle energien er uendret, må akselerasjonen være null.
4. Hvis både konservative og ikke-konservative krefter virker, kan den kinetiske energien endres uten at den potensielle energien endres.

### Oppgave 121

En kule med masse  $m$  blir skutt ut av en fjær. Kule blir skutt ut med farten  $v$ . Vi gjør nå samme forsøk igjen med samme fjær, men med en kule som har masse  $2m$ . Hvilken fart får denne kule?

### Oppgave 123

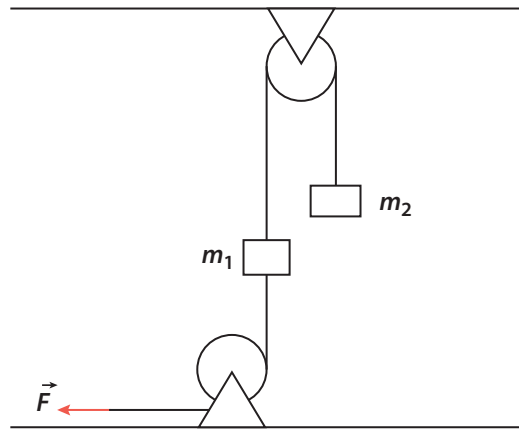
Beregn akselerasjonene for massene  $m_1$  og  $m_2$  og snordraget. Se Figur 15.123.1. Her er snoren og trinsene masseløse, og det er ingen friksjon.



Figur 15.123.1 Systemet

**Oppgave 125**

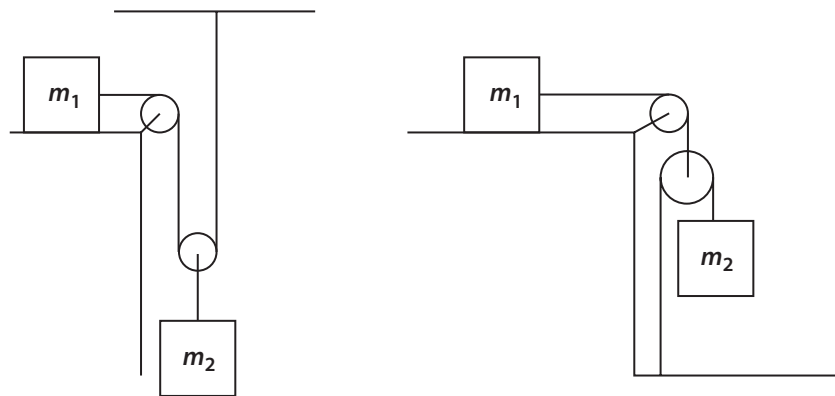
Beregn akselerasjonene for massene  $m_1$  og  $m_2$  og snordraget. Se Figur 15.125.1. Her er snoren og trinsene masseløse, og det er ingen friksjon.



**Figur 15.125.1** Systemet

**Oppgave 127**

Beregn akselerasjonene til massene  $m_1$  og  $m_2$  og snordragene, Figur 15.127.1. Alle trinser er vektløse og friksjonsløse. Massene sklir uten friksjon. Hvilket av de to systemene kan gi massen  $m_1$  raskere akselerasjon enn fritt fall?



**Figur 15.127.1** Systemene

**Oppgave 129**

Kraftmomentet er unikt definert av angrepspunktet og kraften (vektor).

1. Sant
2. Usant

**Oppgave 131**

La kraften  $\vec{F}$  virke i punktet  $\vec{r}$  relativt til et referansepunkt. La  $r_{\parallel}$  og  $r_{\perp}$  være henholdsvis komponenten av  $\vec{r}$  parallelt og perpendikulært på  $\vec{F}$ . Vinkelen mellom  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$  er  $\phi$ , og  $F_{\tan}$  er sinus til lengden av  $\vec{F}$ . Hvilke uttrykk for størrelsen på kraftmomentet  $\tau$  er **ikke** riktig?

1.  $\tau = r_{\perp} F_{\tan}$
2.  $\tau = rF\sin(\phi)$
3.  $\tau = rF\cos(\phi)$
4.  $\tau = r_{\parallel} F$
5.  $\tau = r_{\perp} F$
6.  $\tau = rF_{\tan}$

**Oppgave 133**

Et stivt legeme har vinkelhastighet  $\vec{\omega}(t)$  som hele tiden peker i samme retning. Den eneste akselerasjonen punkter på dette legemet kan ha, er da sentripetalakselerasjon.

1. Sant
2. Usant

**Oppgave 135**

Når man regner med vinkelhastighet og vinkelakselerasjon, kan man ikke regne vinkler i grader, men man må bruke radianer.

1. Sant
2. Usant
3. Formlene som vanligvis brukes gjelder for radianer, men de kan enkelt skaleres om til å gjelde for grader.

**Oppgave 137**

Hvis et objekt roterer når det er observert i et inertialsystem, roterer det også observert fra alle andre inertialsystemer.

1. Sant
2. Usant

**Oppgave 139**

Et hjul ruller med konstant hastighet på et horisontalt underlag uten å spinne. Det er ingen rullemotstand. Avgjør hvilke påstander som er riktige.

1. Det punktet på hjulet som er i kontakt med bakken, har fart  $v = 0$ .
2. Det punktet på hjulet som er i kontakt med bakken, har akselerasjon  $a = 0$ .



3. Det virker ingen friksjonskraft mellom bakken og hjulet.
4. Det finnes et punkt på hjulet som har akselerasjon  $a = 0$ .

**Oppgave 141**

To sylindre ruller ned et skråplan uten rullemotstand. Sylinder 1 har radius  $R$  og masse  $M$  fordelt jevnt over hele sylinderen. Sylinder 2 har radius  $R/2$  og masse  $2M$  fordelt som et tynt skall ytterst. Hvilken ruller raskest?

1. Sylinder 1
2. Sylinder 2
3. De ruller like raskt.

**Oppgave 143**

Spinn er kun definert for objekter som roterer.

1. Sant
2. Usant

**Oppgave 145**

Hvilke påstander om treghetsmoment er riktig.

1. Et objekt har mer enn ett treghetsmoment.
2. Treghetsmomentet kan også beregnes relativt til punkter utenfor objektet.
3. Kinetisk energi knyttet til rotasjon er proporsjonal med treghetsmomentet.
4. Treghetsmomentet beregnet om massesenteret er mindre enn treghetsmomentet beregnet om enhver annen parallell akse.
5. Treghetsmomentet relativt til massesenteret er unikt bestemt av formen til legemet.

**Oppgave 147**

To kuler har identisk størrelse, men den ene har dobbelt så stor masse som den andre. Begge kulene har konstant massetetthet. La  $I_1$  være treghetsmomentet om massesenteret til den letteste kulen. Hva er da treghetsmomentet,  $I_2$ , om massesenteret til den tyngste kulen?

1.  $I_2 = I_1$
2.  $I_2 = 2I_1$
3.  $I_2 = 2 \cdot \frac{2}{5} I_1$
4. Ikke nok informasjon til å avgjøre.

**Oppgave 149**

To kuler har identisk masse, men den ene har dobbelt så stor radius som den andre. Begge kulene har konstant massetetthet. La  $I_1$  være treghetsmomentet om

massesenteret til den minste kulen. Hva er da treghetsmomentet,  $I_2$ , om massesenteret til den største kulen?

1.  $I_2 = \frac{1}{4}I_1$
2.  $I_2 = \frac{1}{2}I_1$
3.  $I_2 = I_1$
4.  $I_2 = 4I_1$
5. Ikke nok informasjon til å avgjøre.

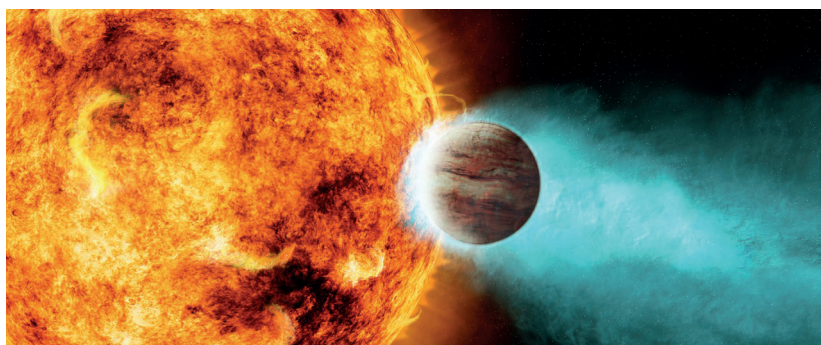
### Oppgave 151

Et stivt legeme roterer med konstant vinkelhastighet  $\vec{\omega}$ . Hvilke påstander er riktig? (Påstander om «alle punkter» skal tolkes som alle punkter bortsett fra sentrum for rotasjonen).

1.  $\vec{a} = 0$  i alle punkter.
2.  $\vec{\alpha} = 0$
3. Alle punkter har samme sentripetalakselerasjon.
4. Alle punkter har samme vinkelakselerasjon.

### Oppgave 153

Det er ved lunsjbordet verdensproblemer løses. Dagens tema er hvor lang tid det ville ta jorden å falle til solen dersom vi plutselig stopper i vår bane rundt den. Noen gjorde overslag, og andre brukte baksiden av servietten. Kan du hjelpe våre venner med å finne løsningen?

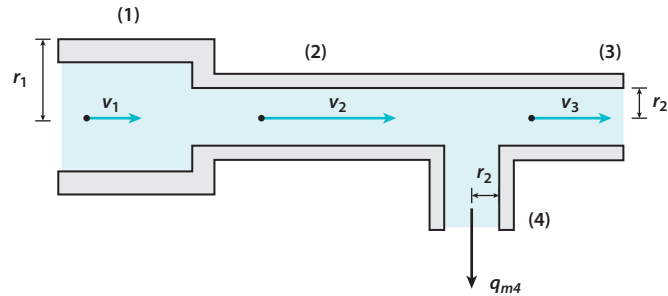


Figur 15.153.1 Siste reis

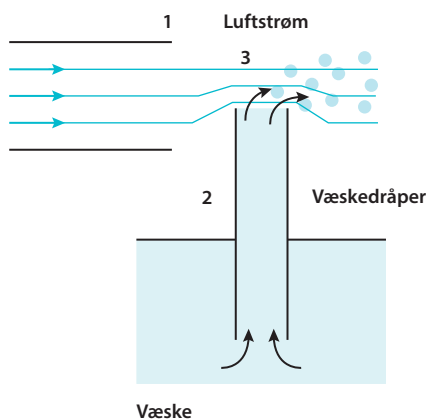
### Oppgave 155

Et sirkelrundt rør (1) med radius  $r_1 = 2,0$  cm går over i et tynnere rør (2) som igjen forgreiner seg i to rør (3) og (4). De tynne rørene har radius  $r_2 = 1,0$  cm, se Figur 15.155.1. I rørene strømmer en væske med massetetthet  $\rho = 0,70 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. I rør (1) er farten  $v_1 = 4,0$  cm/s, og massestrømmen i rør (4) er  $q_{m4} = 1,0$  kg/min.

1. Hvor stor fart  $v_2$  har væsken i rør (2)?
2. Hvor mange liter strømmer gjennom rør (3) per minutt?



Figur 15.155.1 Rør



Figur 15.157.1 Sprøytelakkering

**Oppgave 157**

Ved sprøytelakkering forstøver en luftstrøm lakken, Figur 15.157.1. Forklar hvordan det skjer.

**Oppgave 159**

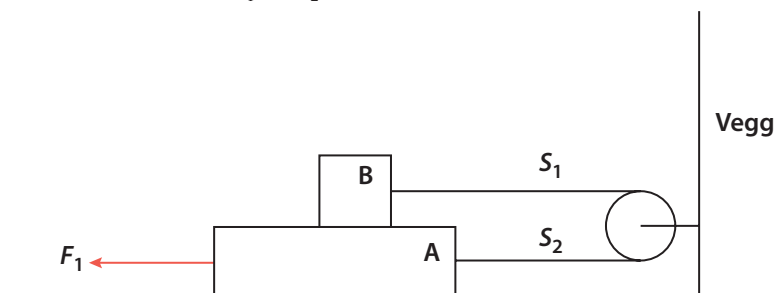
En delfin har god strømlinjeform. Den kan svømme med en fart av 8 m/s. Tverrsnittarealet vinkelrett på svømmeretningen for en voksen delfin er om lag  $A = 0,1 \text{ m}^2$  og dragkoeffisienten  $C_D = 0,06$ .

1. Hvor stor er motstanden fra vannet på delfinen når farten er  $v = 8 \text{ m/s}$ ?
2. Hvor stor effekt yter delfinen da?

**Oppgave 161**

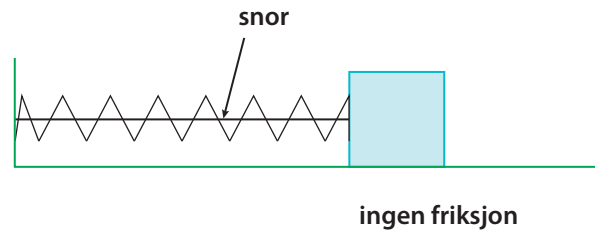
En kloss B med masse 1,0 kg er plassert på toppen av en kloss A med masse 2,0 kg. De to klossene er forbundet med en masseløs snor som løper over en masseløs trinse som vist i Figur 15.161.1. Friksjonskoeffisienten mellom de to klossene og mellom kloss A og gulvet er 0,20. En horisontal kraft  $F_1$  virker på kloss A. Kraften  $F_1$  sin retning er vekk fra vegg.

- a) Tegn separate frilegemediagrammer for de to klossene og trinsen. Hvilken kraft  $F_1$  trengs for å gi kloss A en akselerasjon på  $1,5 \text{ m/s}^2$ ?
- b) Beregn snordragene  $S_1$  og  $S_2$ .



Figur 15.161.1 Klosser, trinse og krefter

## Oppgave 163



Figur 15.163.1 Frilegemediagrammer

Se Figur 15.163.1. Gulvet er friksjonsløst. En masseløs fjær har en hvilelengde på 0,25 m og en fjærkonstant  $k = 100 \text{ N/m}$ . Fjæren er horisontal med en ende festet til veggen. Fjæren blir komprimert til en lengde på 0,15 m og holdes komprimert av en snor festet til veggen. En liten kloss med masse 0,600 kg ligger på gulvet og berører fjæren.

- Finne kraften som snoren utøver på fjæren. Hvor mye energi er lagret i fjæren?
- Snoren kuttes. Hvor stor er farten til klossen når den mister kontakten med fjæren?

# Appendiks



# 16

## Kapittel 16

# Amors piler

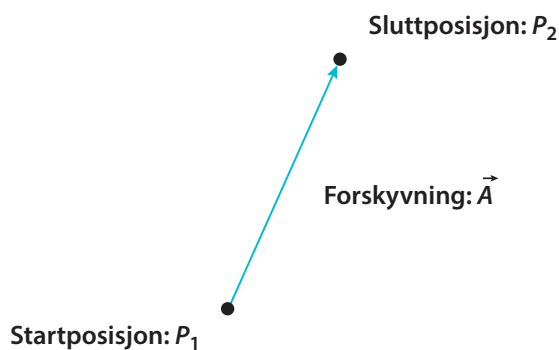
«Fremad i alle retninga.»

Daniel Kvammen (1988–)

**LÆRINGSUTBYTTE:** Vektorer, forskyvningsvektor, retning, størrelse, skalar, vektor, vektoraddisjon, vektorsubtraksjon, enhetsvektorer, komponentvektorer, skalarprodukt, kryssprodukt, høyrehåndsregel, høyrehånds koordinatsystem, posisjonsvektor

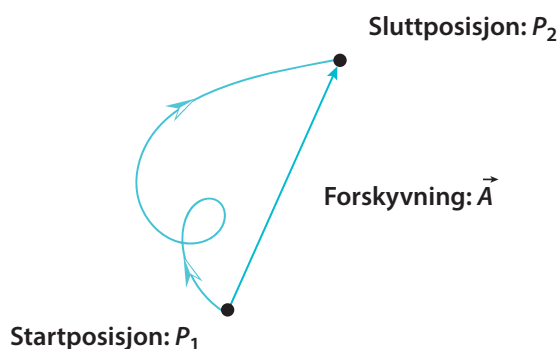
Kjærlighetsguden Amor har to typer piler. Den ene er av gull og med en meget skarp tupp. Den andre er butt og er av bly. Skulle du være så heldig å bli truffet av gullpilen, vil du fylles med ukontrollert lyst. Den andre bør du dukke unna, for den fyller deg kun med aversjon. Vi skal se på en tredje type pil som er meget populær i fysikk og matematikk, og den kalles en vektor.

Ordet vektor kommer fra latin og betyr bærer, og den første vektoren vi skal se på, Figur 16.1, er nettopp en slik bærer som tar oss fra et punkt til et annet, nemlig forskyvningsvektoren.



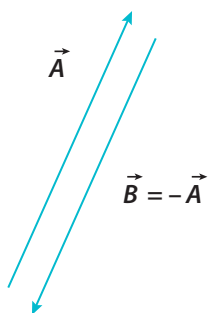
**Figur 16.1** Forskyvningsvektoren

Forskyvning er en vektorstørrelse som har retning og størrelse. Forskyvningsvektoren er kun avhengig av start og stoppunkt, Figur 16.2, og ikke hvordan en har forflyttet seg fra  $P_1$  og  $P_2$ .



**Figur 16.2** Forskyvningsvektoren er kun avhengig av endepunktene





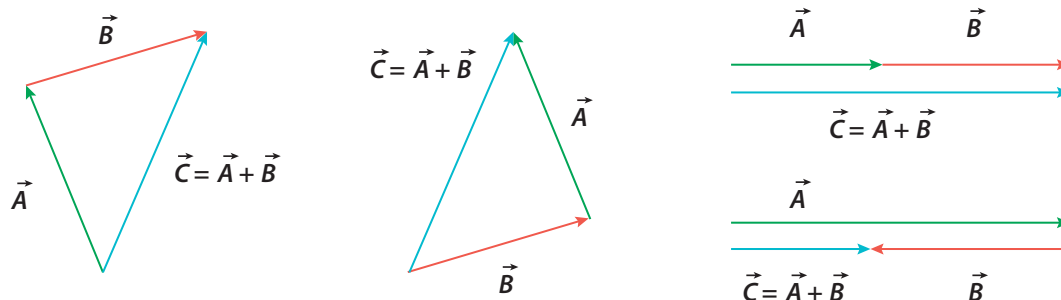
**Figur 16.3** Den negative av en vektor

En vektorstørrelse  $\vec{V}$  angis ved å sette en pil over den. Vektorens pil fra startposisjon  $P_1$  til sluttposisjon  $P_2$  som angitt i Figur 16.1, viser vektorens retning. Dersom to vektorer har samme retning, er de parallelle. En vektor som er like stor som en annen, men har motsatt retning, Figur 16.3, er den negative av den første.

Lengden av en vektor skrives som:

$$A = |\vec{A}| \quad (16.1)$$

Vektorer kan både adderes og subtraheres. I Figur 16.4 ser du en del eksempler på vektoraddisjon.



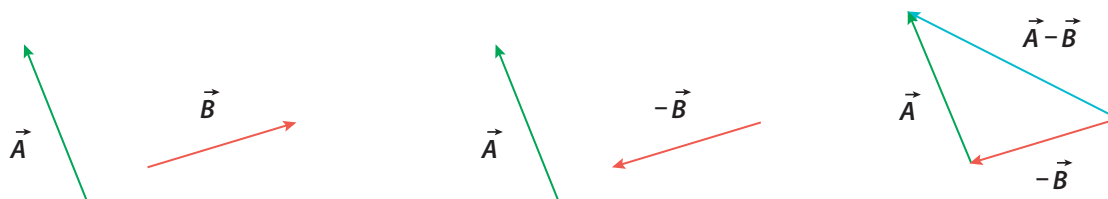
**Figur 16.4** Vektoraddisjon

Av de to summasjonene til venstre i Figur 16.5 ser vi at rekkefølgen vi adderer i ikke spiller noen rolle (kommutativ lov). Til høyre ser vi to summasjoner av henholdsvis parallelle og antiparallelle vektorer.

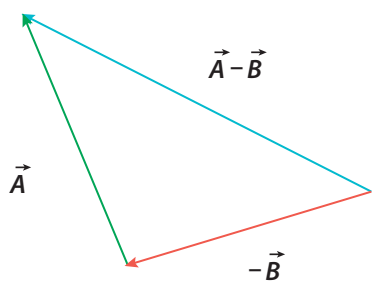
Når vi subtraherer vektorer, kan vi bruke addisjon ved å endre retning på vektoren som trekkes fra:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (16.2)$$

Prosedyren for subtraksjon er vist i Figur 16.6.



**Figur 16.5** Vektorsubtraksjon

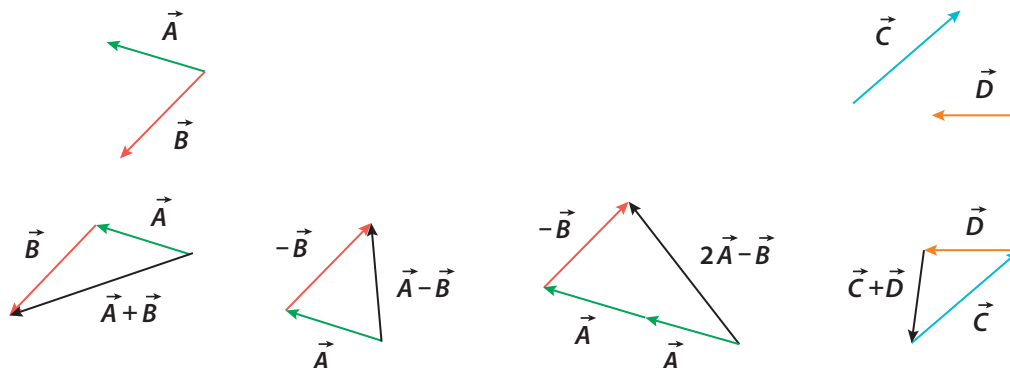


**Figur 16.6** Resultat av vektor-subtraksjon

Dersom du sammenligner høyre og venstre siden av Figur 16.5, ser du at  $\vec{A} - \vec{B}$  går fra tuppen av  $\vec{B}$  til tuppen av  $\vec{A}$ ; Figur 16.6. Denne observasjonen er nyttig da det er mye vektorsubtraksjon i fysikk. Både hastighet og akselerasjon er definert som forskjeller (som gir subtraksjon) i vektorstørrelser. Dersom du er nysgjerrig på bruken allerede nå, kan du ta en titt i kapittelet «**Alt er i endring**».

Vektorstørrelser kan multipliseres med tall (i denne sammenhengen kalles de skalarer). Vektoren  $2\vec{A}$  peker i samme retning som  $\vec{A}$ , men er dobbelt så lang,  $2A = 2|\vec{A}|$ .

Det er kanskje på tide med en liten øvelse? I Figur 16.7 er det gitt fire vektorer  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  og  $\vec{D}$ . Vi skal finne  $\vec{A} + \vec{B}$ ,  $\vec{A} - \vec{B}$ ,  $2\vec{A} - \vec{B}$  og  $\vec{C} + \vec{D}$ .



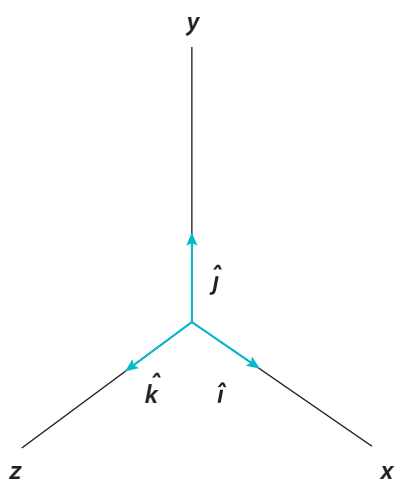
**Figur 16.7** Regning med vektorer

Dersom en har et koordinatsystem, kan vektorer dekomponeres. I det vanlige koordinatsystemet x, y og z bruker en enhetsvektorer  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  og  $\hat{k}$ . Disse har en lengde på 1 og står normalt på hverandre som vist i Figur 16.8. På hodet har de fått en hatt istedenfor pil bare for å skille dem fra de andre vektorene.

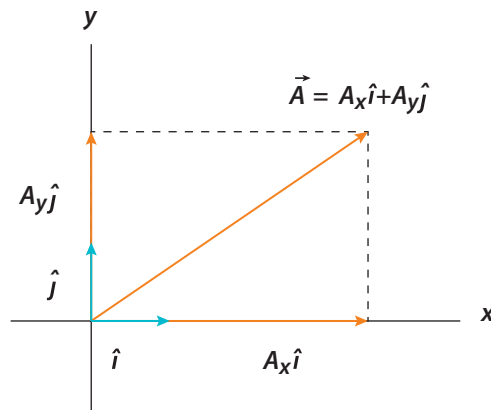
Vi kan bruke dekomponering til å finne størrelsen av en vektor i ulike retninger. Det er nyttig i fysikk når vi for eksempel skal finne krefters virkning i ulike retninger. Et eksempel på dekomponering i to dimensjoner er gjengitt i Figur 16.9.

I Figur 16.9 har man vektoren:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad (16.3)$$



**Figur 16.8** Enhetsvektorer



**Figur 16.9** Dekomponering av vektor

Der  $A_x$  er x-komponenten og  $A_y$  er y-komponenten. En annen måte å skrive det samme på som i ligning (16.3) er:

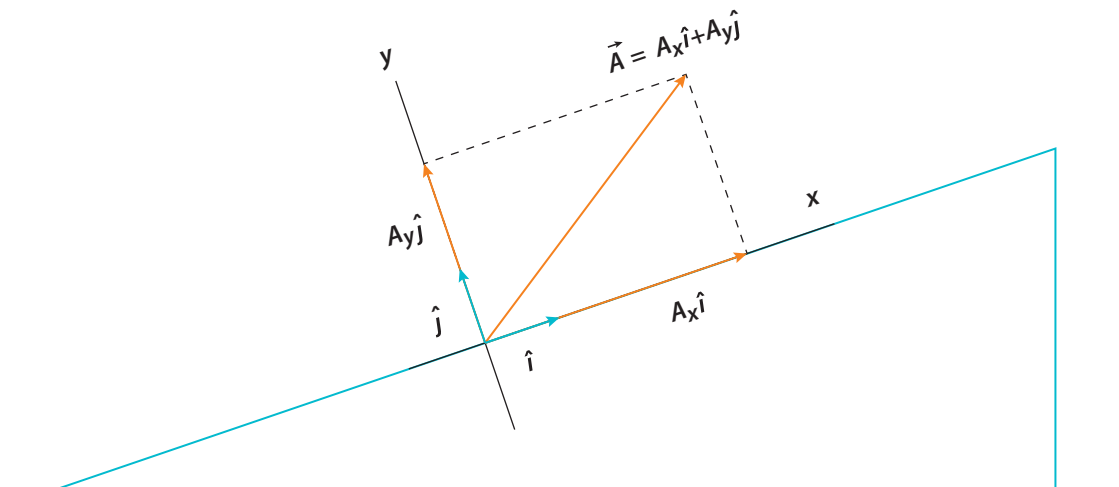
$$\vec{A} = (A_x, A_y) \quad (16.4)$$

To vektorer kan adderes ved å addere komponentene:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \quad (16.5)$$

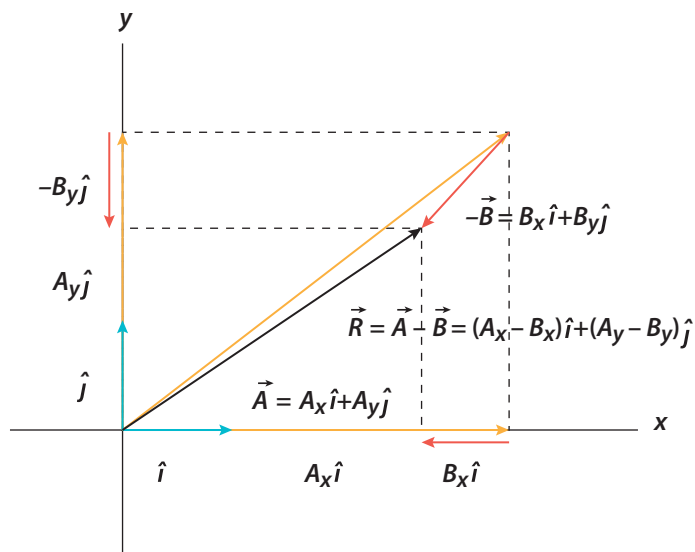
Dette brukes mye i fysikken.

Hvis vi har et skråplan, er det ingenting i veien for å definere x-aksen langs skråplanet og y-aksen normalt på det, som vist i Figur 16.10. En velger kort og godt det koordinatsystemet som passer best til problemet som skal løses.



**Figur 16.10** Koordinatsystem og dekomponering på et skråplan

La oss prøve å subtrahere to vektorer  $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$  ved å bruke komponentvektorer. Figur 16.11 viser hvordan.



**Figur 16.11** Subtraksjon av to dekomponerte vektorer

Mange fysiske størrelser kan uttrykkes ved vektorprodukter. Siden vektorer ikke er vanlige tall, så er vektorproduktene definert litt annerledes. Det første produktet vi skal se på er skalarproduktet, også kalt prikkprodukt, og det er definert som følger:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\phi) = AB\cos(\phi) \quad (16.6)$$

Figurativt kan det beskrives som vist i Figur 16.12.



**Figur 16.12** Skalarprodukt

Vi ser i Figur 16.12 at  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  er komponenten av  $\vec{A}$  langs  $\vec{B}$  ganger  $|\vec{B}|$ . Dette er også lik komponenten av  $\vec{B}$  langs  $\vec{A}$  ganger  $|\vec{A}|$ . Ligning (16.6) viser at dersom to vektorer står vinkelrett på hverandre, er skalarproduktet av dem lik null.

Når en skal finne vinkelen mellom de to vektorene, fører en halene sammen. Skalarproduktet kan også uttrykkes ved hjelp av komponenter:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \cdot B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \cdot B_z \hat{k} + A_y \hat{j} \cdot B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \cdot B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \cdot B_z \hat{k} + A_z \hat{k} \cdot B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \cdot B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k} \quad (16.7)$$

Dette så jo litt voldsomt ut, men trøsten er at vi har et ortonormalt koordinatsystem, enhetsvektorene står normalt på hverandre, og da blir kun enhetsvektorenes skalarprodukter med seg selv stående igjen.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \cdot B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (16.8)$$

I fysikk er for eksempel arbeid  $W$  definert som skalarproduktet mellom kraft  $\vec{F}$  og retning  $\vec{s}$ .

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (16.9)$$

Dersom kraft eller retning endrer seg etter som en går langs en bane, får en et linjeintegral for arbeidet som består at skalarproduktet av  $\vec{F}$  og retning  $d\vec{r}$ .

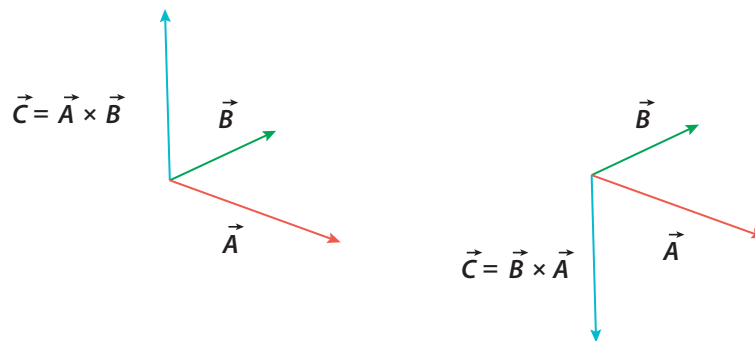
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (16.10)$$

Det andre vektorproduktet kalles kryssproduktet og er definert som:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad (16.11)$$

Som vi ser, er kryssproduktet i seg selv en vektor. Hvilken vei peker den? Vel, for å finne ut det, må man finne frem høyre hånd og holde tommelen opp. En holder håndflaten i  $\vec{A}$  sin retning og dreier mot  $\vec{B}$  og finner at tommelen, og dermed  $\vec{C}$ , stikker ut av papiret dersom  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$  ligger i papirplanet. Gjør vi det i motsatt retning fra  $\vec{B}$  til  $\vec{A}$ , vil  $\vec{C}$  gå inn i papiret; Figur 16.13. Kryssproduktet er altså antikommutativt.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (16.12)$$



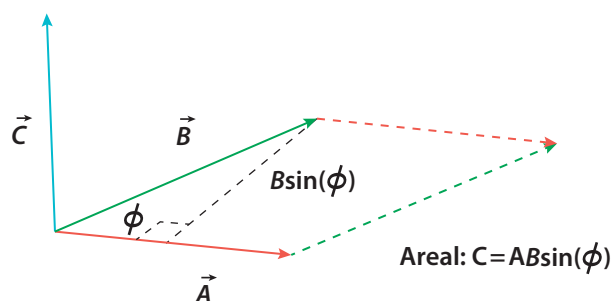
**Figur 16.13** Kryssproduktet er antikommutativt

Størrelsen til  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  er:

$$C = |\vec{A}||\vec{B}|\sin(\phi) = AB\sin(\phi) \quad (16.13)$$

Hvor  $\phi$  er vinkelen mellom vektor  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$ ,

som er lik arealet av parallelogrammet som vektorene utspenner, som vist i Figur 16.14.



**Figur 16.14** Kryssproduktets størrelse er lik arealet av parallelogrammet som  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$  utspenner

Vi ser at kryssproduktet av to parallelle vektorer er lik null.

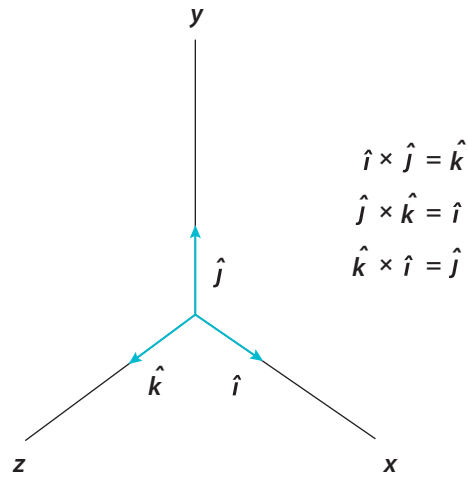
Er det mulig å skrive kryssproduktet på komponentform? Absolutt, og da må vi se hva som skjer når vi tar kryssprodukt av enhetsvektorene. Tar vi kryssproduktet av en enhetsvektor med seg selv, så blir resultatet på grunn av manglende vinkel  $\sin(0^\circ) = 0$ .

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad (16.14)$$

For å finne de andre relasjonene må vi bruke høyrehåndsregelen på enhetsvektorene som vist i Figur 16.15. Holder du høyre hånds håndflate langs x-aksen og bøyer den til y-aksen, vil tommelen stikke ut i z-retning. Altså  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ . Starter du med y-aksen og bøyer håndflaten mot z-aksen, peker tommelen i x-aksens retning,  $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ . Starter du med z-aksen og bøyer håndflaten mot x-aksen, vil tommelen peke i y-retning,  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ . Et koordinatsystem med akser slik som vist i Figur 16.16 kalles et høyrehåndskoordinatsystem.

Da har vi det vi trenger, og det er bare å sette i gang:

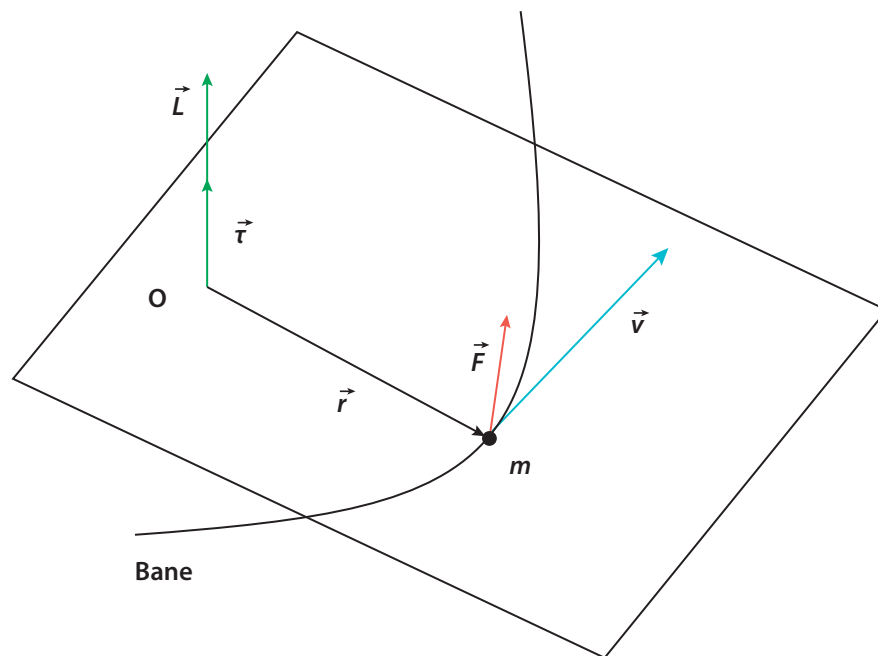
$$\begin{aligned} \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + \\ &A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} = A_x B_y \hat{k} - A_y B_z \hat{k} - A_y B_x \hat{k} + \\ &A_y B_z \hat{i} + A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (16.15) \end{aligned}$$



**Figur 16.15** Kryssprodukt av enhetsvektorer

Dersom for eksempel  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$  er i x-y planet, vil  $\vec{C}$  peke i z-retning med komponenten  $C_z = A_x B_y - A_y B_x$ .

I fysikk finner vi kryssprodukter når vi skal beregne hastighet ved jevn rotasjon,  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , eller når vi skal finne spinn  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  og kraftmoment  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  rundt et gitt punkt O. Eksempel på det siste er vist i Figur 16.16 for en masse  $m$  som beveger seg langs en bane.



**Figur 16.16** Spinn  $\rightarrow L$  og kraftmoment  $\rightarrow \tau$  rundt O

Vektoren  $\vec{r}$  fra O kalles massen  $m$  sin posisjonsvektor.





# 17

## Kapittel 17

# Alt er i endring

«Jeg oppsøker store ting som skaper bevegelse.»

*Dagbladet Magasinet, Vigdis Hjort (1959–)*

**LÆRINGSUTBYTTE:** Kinematikk, bevegelsesdiagram, sammenheng mellom posisjon, hastighet og akselerasjon, definisjon av hastighet og akselerasjon, rettlinjert bevegelse med konstant akselerasjon, sirkelbevegelse med konstant fart, skrått kast

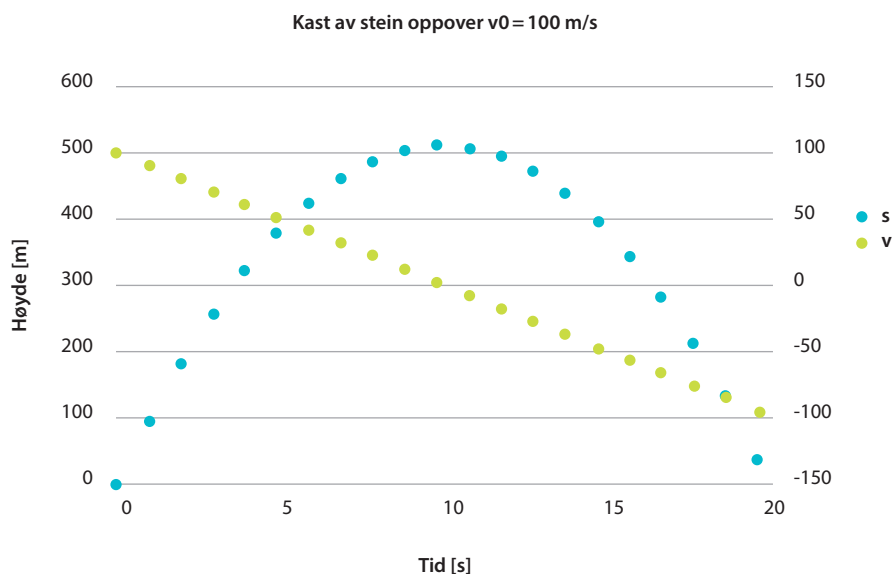
**Plutselig blir alt forandret. Jeg ble introdusert til regnearket Excel en gang på nittitallet, og har siden det vært begeistret. Regneark er enkelt å forstå og kan brukes til alt mulig, fra de letteste regneoperasjoner til store programmer med avanserte grafer. La oss løse kinematikkutfordringer ved å ta Excel i bruk.**

Vi kaster en stein rett opp med utgangsfart  $v_0$ . Tyngdekraften  $g$  vil sørge for at farten blir mindre til steinen når et toppunkt og snur og faller ned igjen. For å beregne hvor steinen er til enhver tid kan vi bruke formlene (4.7) og (4.12) fra kapittelet «Historisk sett».

$$v = v_0 - gt \quad (17.1)$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (17.2)$$

Her har vi satt inn  $-g$  siden tyngden virker mot bevegelse oppover. Da er det bare å finne frem et regneark og sette inn formlene (17.1) og (17.2).



**Figur 17.1** Kast av stein oppover i et tyngdefelt

I Figur 17.1 er det 1 sekund mellom punktene. Vi ser at farten avtar jevnt og trutt, mens den økte høyden blir mindre og mindre etter hvert, og til slutt når man en maksimalhøyde på cirka 500 meter etter 10 sekunder. En annen måte å vise bevegelsen på er å bruke såkalte bevegelsesdiagrammer. Figur 17.2 viser et slikt for vårt kast.

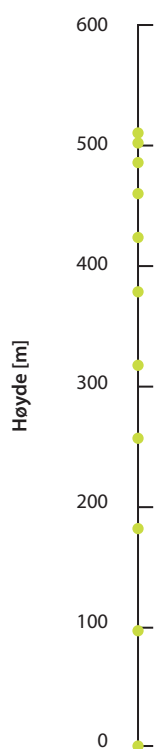
Her er høyden over bakken gitt ved jevne intervaller, 1 sekund i vårt tilfelle, og en ser hvordan høydeforskjellen blir mindre og mindre etter som tiden går. Til slutt når steinen sin makshøyde og returnerer.

Så kan vi tegne inn hastigheten i bevegelsesdiagrammet (Figur 17.3). Hastighet har både størrelse og retning, og det er derfor naturlig å bruke vektorer.

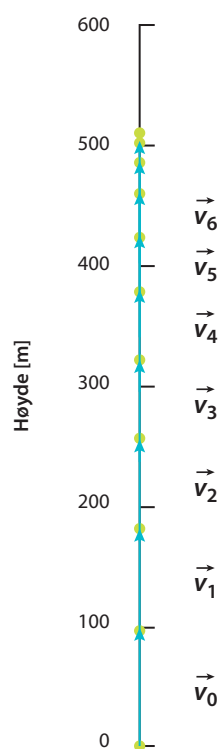
Vi ser at hastigheten avtar etter som tiden går. Hvor mye avtar den med? Vel, det er bare å trekke fra hverandre to nærliggende hastigheter:

$$\vec{g} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_2}{\Delta t} = \dots \quad (17.3)$$

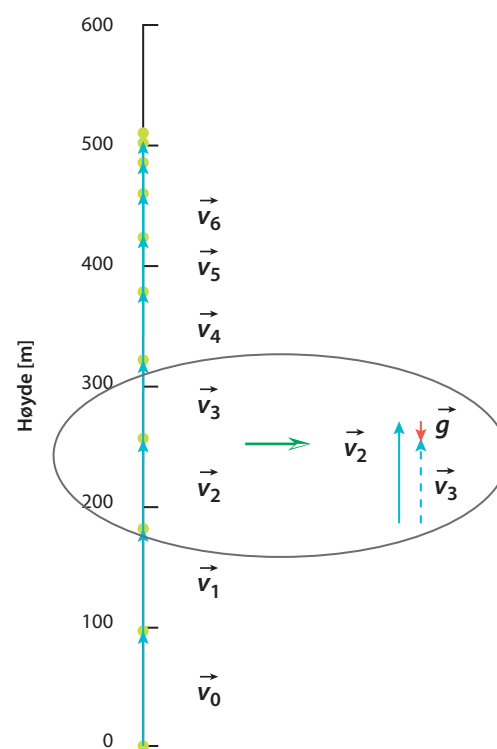
Vi ser at subtraksjon av to nærliggende hastigheter gir oss akselerasjonen som i vårt tilfelle er  $\vec{g}$ . Akselerasjon er hastighetsendring på tid, men siden vi har 1 sekund mellom punktene i bevegelsesdiagrammet, kan vi tegne slik vi har gjort i Figur 17.4. Den figuren viser et bevegelsesdiagram med akselerasjon inntegnet. Til høyre er  $\vec{v}_3$  tegnet med stiplet linje, da den er ført tilbake til  $\vec{v}_2$  sitt utgangspunkt.



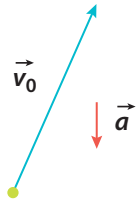
**Figur 17.2** Bevegelsesdiagram for stein oppover i et tyngdefelt



**Figur 17.3** Bevegelsesdiagram med hastighet inntegnet



**Figur 17.4** Bevegelsesdiagram med hastighet og akselerasjon inntegnet



**Figur 17.5** Startbetingelser for et bevegelsesdiagram

Er du klar for å lage et bevegelsesdiagram basert på opplysninger gitt i Figur 17.5?

En må gå trinnvis til verks basert på:

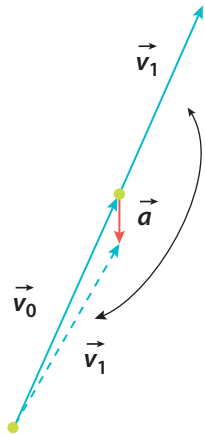
$$\vec{v}_{stopp} = \vec{v}_{start} + \vec{a} \Delta t \quad (17.4)$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_{stopp} - \vec{v}_{start} = \vec{a} \Delta t \quad (17.5)$$

I vårt tilfelle velger vi å la  $\Delta t = 1$  sekund, og da blir:

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \quad (17.6)$$

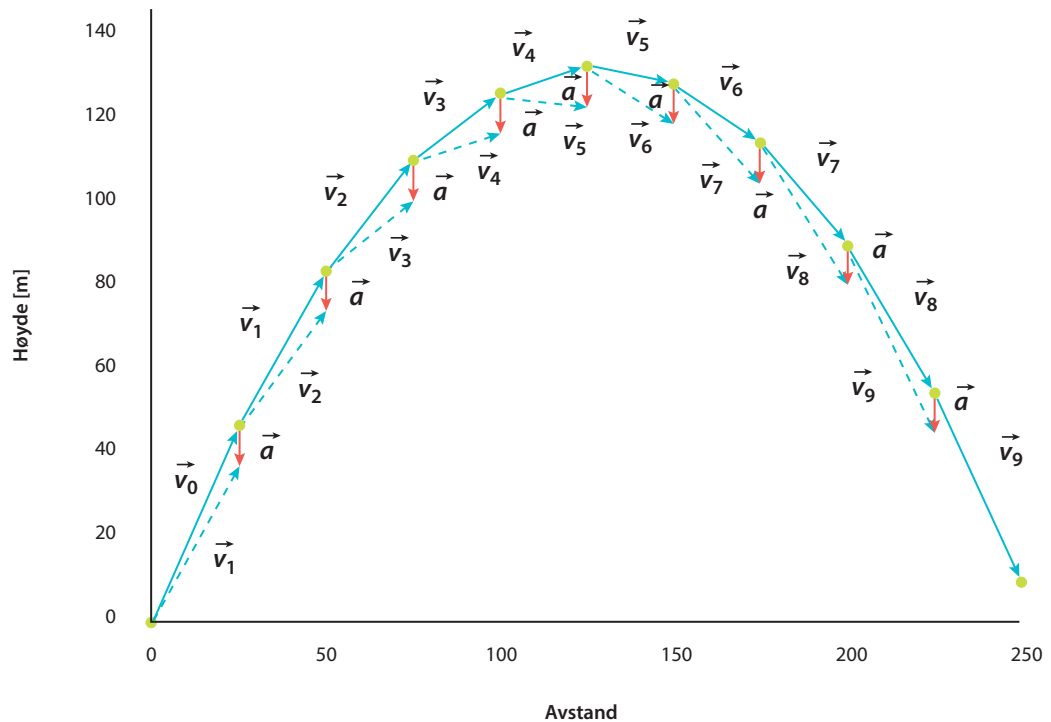
Første trinn er vist i Figur 17.6:



**Figur 17.6** Bevegelsen bøyer av siden den nedad rettede akselerasjonen minsker hastigheten i vertikal retning

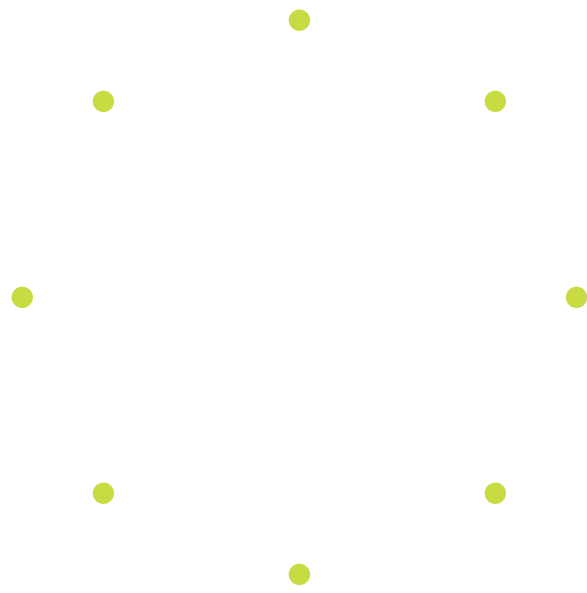
Da er det bare å fortsette ufortrødent videre. I Figur 17.7 er sluttresultatet gitt med valgt  $v_0$  til å være 50 m/s. Det er et skrått kast. Vi ser at dersom vi kaster på skrå oppover i et tyngdefelt, vil den horisontale hastigheten ikke endre seg, men være lik horisontalkomponenten av utgangshastigheten  $v_0$ .

Skrått kast  $v_0 = 50$  m/s



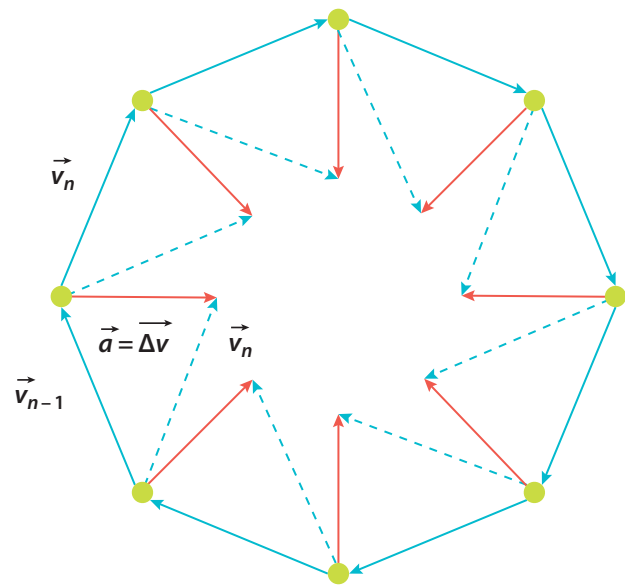
**Figur 17.7** Vi får et skrått kast med de startbetingelsene som var gitt i Figur 17.5

I Figur 17.8 er bevegelsesdiagrammet, med 1 sekunds intervaller, for en sirkelbevegelse med klokken gitt. Hva er sammenhengen mellom hastighet og akselerasjon i dette tilfellet?



**Figur 17.8** Bevegelsesdiagram for en jevn sirkelbevegelse med klokken

Det er bare å tegne inn vektorer for hastigheten og finne  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . Akselerasjonsvektoren som er konstant i størrelse, peker hele tiden mot sentrum i sirkelen som bevegelsen beskriver. Hadde vi orket å ta med flere punkter langs sirkelen, finere oppløsning i tid, ville vi sett at for jevn sirkelbevegelse så står akselerasjonsvektoren normalt på hastighetsvektoren. Hastighetens størrelse, farten, endrer seg, ikke bare dens retning. Se Figur 17.9.

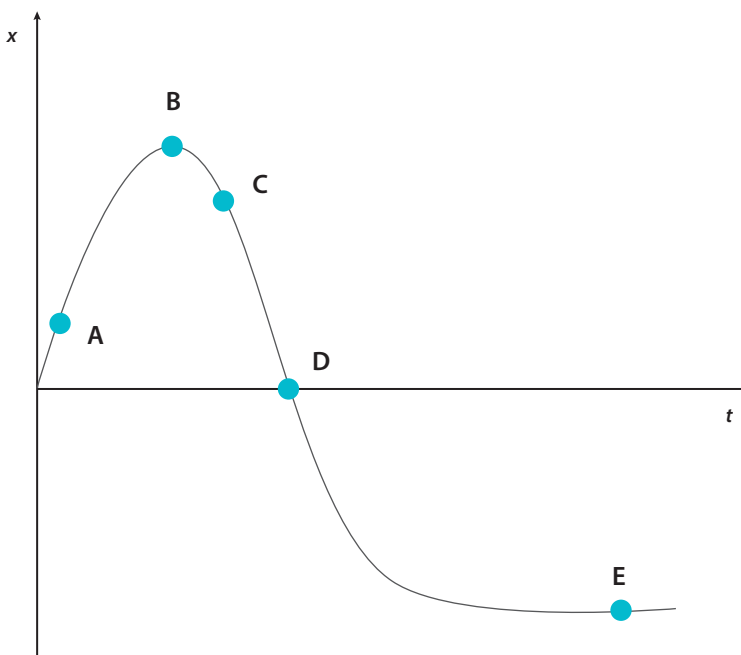


**Figur 17.9** Jevn sirkelbevegelse med klokken med hastigheter og akselerasjon inntegnet

Du kan jo more deg med å måle hastighetsvektoren, akselerasjonsvektoren og radius i Figur 17.9. Ikke uventet vil du finne et forhold mellom akselerasjon og hastighet som er i nærheten av det vi utledet i (8.6).

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (17.7)$$

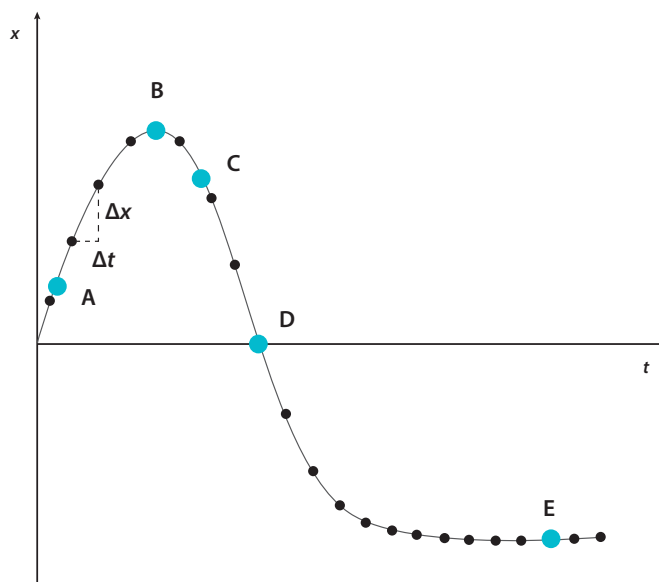
Bare for å teste våre kunnskaper så langt kan vi jo prøve oss på følgende oppgave. Hvor i posisjon versus tid diagrammet for et legeme gjengitt i Figur 17.10 beveger legemet seg raskest, er i ro, senker hastigheten eller endrer retning?



**Figur 17.10** Posisjon versus tid diagram for et legeme

Her har vi ikke et bevegelsesdiagram, men en heltrukken linje som viser posisjon som funksjon av tiden. De gitte punktene er tilfeldige og bare plassert for å sjekke kunnskapen. La oss starte med det enkle – i ro. Rundt punktet E er det ingen forandring av  $x$ -verdi når  $t$  løper. E er altså et punkt hvor legemet er i ro. B er også et slikt punkt, men der er legemet i ro kun en kort stund før det endrer retning. Ved punktet A øker  $x$ -verdien med tiden, og en har en positiv hastighet. For punktene C og D har en negativ hastighet. Punkt D har den raskeste hastigheten.

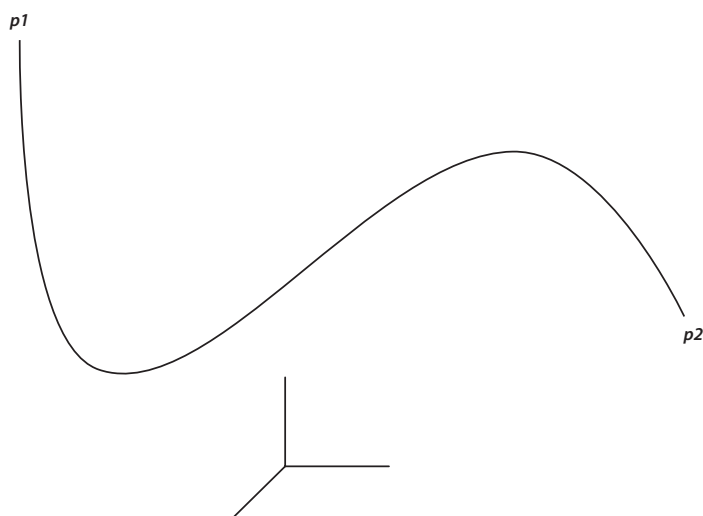
I neste figur, Figur 17.11, har vi tegnet inn markører for faste tidsintervaller  $\Delta t$ . Hastighet er definert som forandring i posisjon delt på forandring i tid;  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .



**Figur 17.11** Posisjon versus tid diagram for et legeme med tidsmarkører på grafen

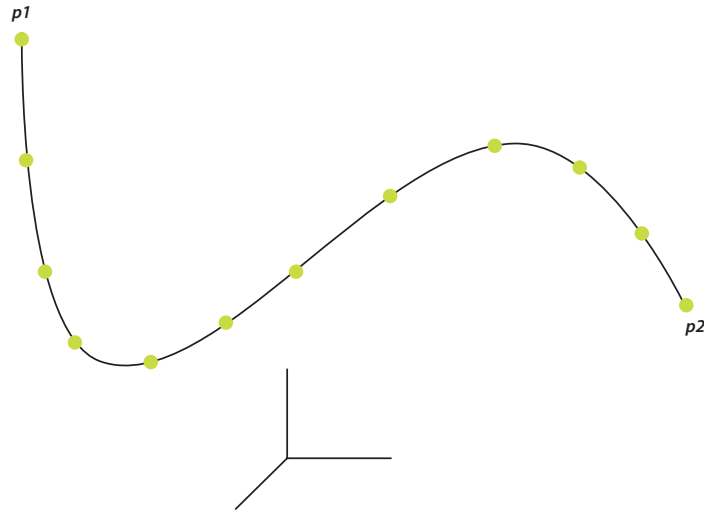
Vi ser at hastigheten går mot tangenten til grafen dersom vi gjør avstanden mellom markørene mindre. Momentan hastighet er gitt ved  $v = \frac{dx}{dt}$ .

Med det skrå kastet beveget vi oss i to dimensjoner. Tør vi ta skrittet helt ut å bevege oss i tre dimensjoner? Figur 17.12 viser en bane fra  $p1$  til  $p2$  i tre dimensjoner til et legeme. Det lille koordinatsystemet nederst gir et hint om at det er tre dimensjoner det er snakk om.



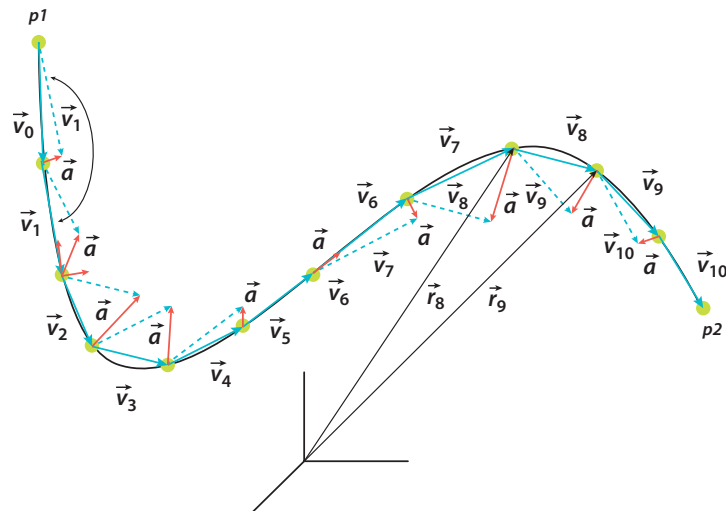
**Figur 17.12** Bane i tre dimensjoner for et legeme

Dette er jo vel og bra, men vi mangler informasjon for å finne hastighet og akselerasjon. Vi trenger informasjon om tid. I Figur 17.13 er et bevegelsesdiagram tegnet opp på banen.



**Figur 17.13** Bane i tre dimensjoner for et legeme med bevegelsesdiagram

Vi ser at noen steder er det langt mellom punktene, som betyr rask bevegelse, og noen steder kort mellom punktene, som betyr sakte bevegelse. Med denne ekstra informasjonen er det mulig å finne den gjennomsnittlige hastighet og akselerasjon langs banen. Det er vist i Figur 17.14.

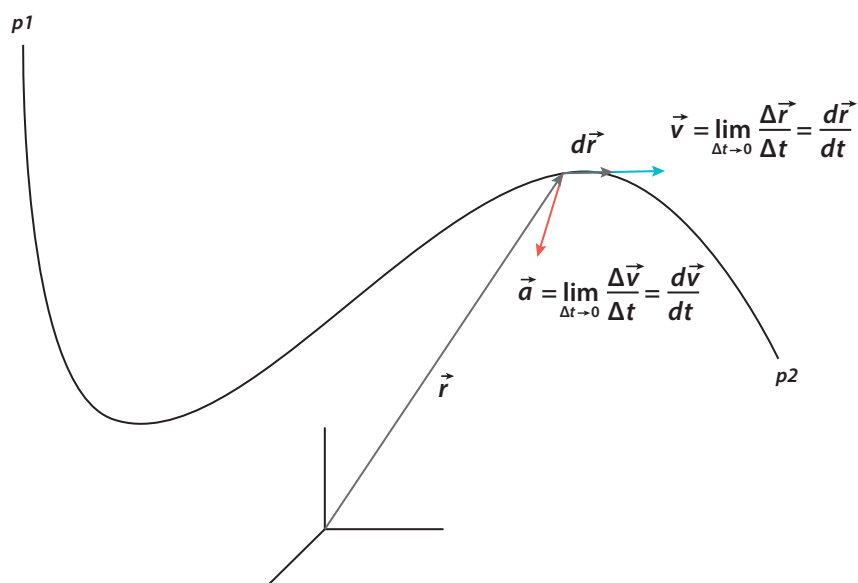


**Figur 17.14** Bane i tre dimensjoner med posisjoner, hastigheter og akselerasjoner



Figur 17.14 inneholder mye informasjon. Som tidligere, har vi tegnet inn hastigheter og tilhørende akselerasjoner. Vi ser at der hvor banen krummer, peker akselerasjonen inn mot krumningen. Noen steder har en også akselerasjon langs banen. I punktet mellom  $\vec{v}_2$  og  $\vec{v}_1$  er akselerasjonen dekomponert i en komponent langs banen og en normalt på. Vi ser der en negativ akselerasjon langs banen som bremser legemet, og en normal akselerasjon som avbøyer det. For hastigheten  $\vec{v}_8$  er det tegnet to posisjonsvektorer  $\vec{r}_8$  og  $\vec{r}_9$ . Hastigheten er gitt av forandringen i posisjonsvektor.  $\vec{v}_8 = \frac{\vec{r}_9 - \vec{r}_8}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ .

Ved å la avstanden  $\Delta t$  mellom punktene i bevegelsesdiagrammet gå mot null får en som gitt i Figur 17.15.



**Figur 17.15** Momentan posisjon, hastighet og akselerasjon

Dette var den generelle læren om bevegelse – kinematikken. Hvem eller hva som beveger tas det ikke stilling til, men vi vet at det står krefter bak.

Før vi avslutter, kan det være greit å repetere de spesialtilfellene vi har vært borti tidligere.

#### **Rettlinjet bevegelse med konstant akselerasjon:**

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (17.8)$$

$$v = \int a \, dt \quad (17.9)$$

$$v = v_0 + at \quad (17.10)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (17.11)$$

$$s = \int v dt \quad (17.12)$$

$$s = \int (v_0 + at) dt = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (17.13)$$

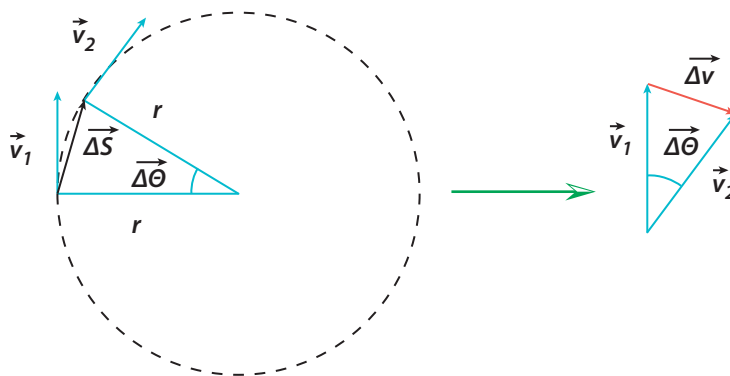
Det er ikke nødvendig med vektorer, da bevegelsen er rettlinjet. Her er  $s_0$  startposisjon og  $v_0$  startfart.

### Sirkelbevegelse med konstant fart:

$$s = r\theta \quad (17.14)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r \quad (17.15)$$

Her er  $s$  lengden på sirkelbuen når en har rotert en vinkel  $\theta$ .  $\omega$  er vinkelhastigheten. Hvordan skal en så komme videre? Hastigheten  $\vec{v}$  er ikke konstant, men forandrer retning etter som en roterer rundt. Figur 17.16 illustrerer dette.



**Figur 17.16** Forandring av retning og hastighet

Vi ser at de to tegnede trekantene er formlike, og da har vi:

$$\frac{\vec{\Delta v}}{v} = \frac{\Delta s}{r} \quad (17.16)$$

Dette kan vi bruke til å finne akselerasjonen som hele tiden peker mot sentrum, slik som vi så i Figur 17.9. Denne akselerasjonen kalles sentripetalakselerasjon fordi den peker mot sentrum.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{|\vec{\Delta v}|}{\Delta t} \right) = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{r} \quad (17.17)$$

En alternativ skrivemåte kan vi få ved å bruke resultatet fra (17.15).

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r \quad (17.18)$$

### Bevegelse i konstant tyngdefelt (skrått kast):

Dersom utgangshastigheten ikke er direkte langs tyngdefeltet, kan hastigheten dekomponeres i en hastighet langs tyngdefeltet og en hastighet på tvers.

Hastigheten langs tyngdefeltet:

$$v = v_{0 \text{ vertikal}} - gt \quad (17.19)$$

$$s = s_{0 \text{ vertikal}} + v_{0 \text{ vertikal}} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (17.20)$$

Hastigheten på tvers av tyngdefeltet:

$$v = v_{0 \text{ horisontal}} \quad (17.21)$$

$$s = s_{0 \text{ vertikal}} + v_{0 \text{ vertikal}} t \quad (17.22)$$



# 18

Kapittel 18

---

## Linjeintegral og konservative krefter

«May the force be with you.»

Star Wars

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Linjeintegral, konservative krefter, energi og potensial

---

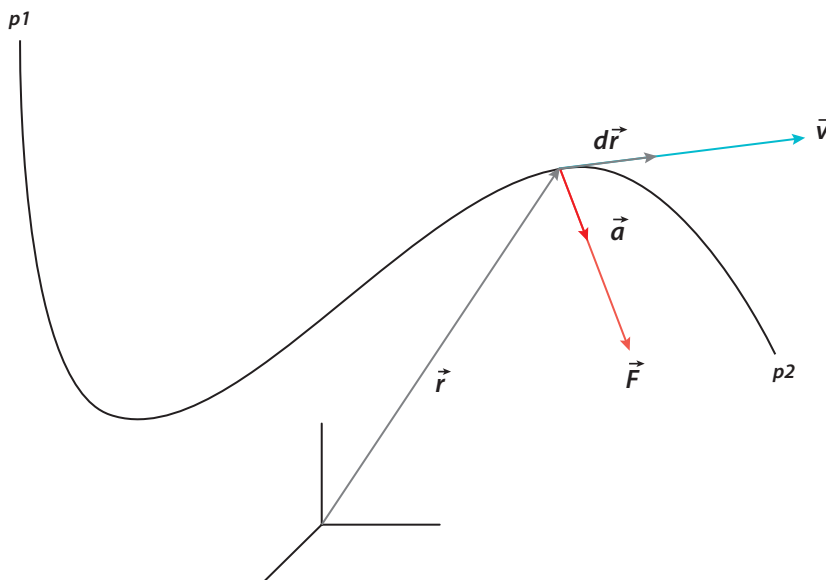
**Husker du definisjonen av arbeid slik du fikk servert den i fysikkundervisningen? Jeg tipper det var noe å la «Når en kraft virker på en gjenstand som beveger seg i kraftretningen, utfører kraften et arbeid på gjenstanden. Arbeidet er lik kraften multiplisert med veien,  $W = Fs$ ».**

Videre ble du kanskje gjort oppmerksom på det underlige faktum at fysikkens arbeid kun utføres av kraft i bevegelsesretningen. Krefter som virker normalt på og endrer bevegelsesretningen, utfører intet arbeid! Så fikk du muligens en rekke paradoksale eksempler på hva som ikke er arbeid. Dersom en koffert blir båret bortover med jevn fart, er det ikke arbeid, da tyngdekraften står normalt på veien. I møte med slike tilsynelatende meningsløsheter er det lett å forkaste fysikk som virkelighetsfjern og upraktisk.

Årsaken til denne problematiske definisjonen er at elever ikke har de nødvendige forutsetninger for å få den egentlige definisjonen av arbeid, nemlig at arbeid er lik linjeintegralet av kraften langs en kurve fra et punkt i rommet til et annet:

$$W = \int_{p1}^{p2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (18.1)$$

Dette integralet kan regnes ut når kraften er gitt som funksjon av posisjonen, Figur 18.1.



**Figur 18.1** Linjeintegral av kraften  $\vec{F}$  fra posisjon  $p1$  til  $p2$

For å regne ut dette linjeintegralet tar en altså og integrerer prikkproduktet av kraften med tangenten til linjen langs hele kurven. Dersom kraften er gitt som funksjon av tiden, gjøres det ved å parameterisere kraften og retningsvektoren med tiden  $t$  som parameter.

$$W = \int_{t1}^{t2} \vec{F}(t) \cdot d\vec{r}(t) \quad (18.2)$$

Bare for å se gangen i beregninger av linjeintegral kan det være greit med et lite eksempel. Vi ser på en situasjon der en elastisk fjær peker ut fra origo i et koordinat-system i en slik retning at kraftkomponenten er dobbelt så stor i y-retningen som i x-retningen,  $\vec{F} = k(x, 2x)$  der  $k = 1 \text{ N/m}$  er fjærkonstanten, og likevektposisjonen er i origo. Ved en infinitesimalt liten forflytning endres forflytningsvektoren med  $d\vec{r} = (dx, dy)$ . Vi skal beregne arbeidet når fjæra trekkes fra likevektposisjonen til  $x = 1 \text{ m}$ . Det blir:

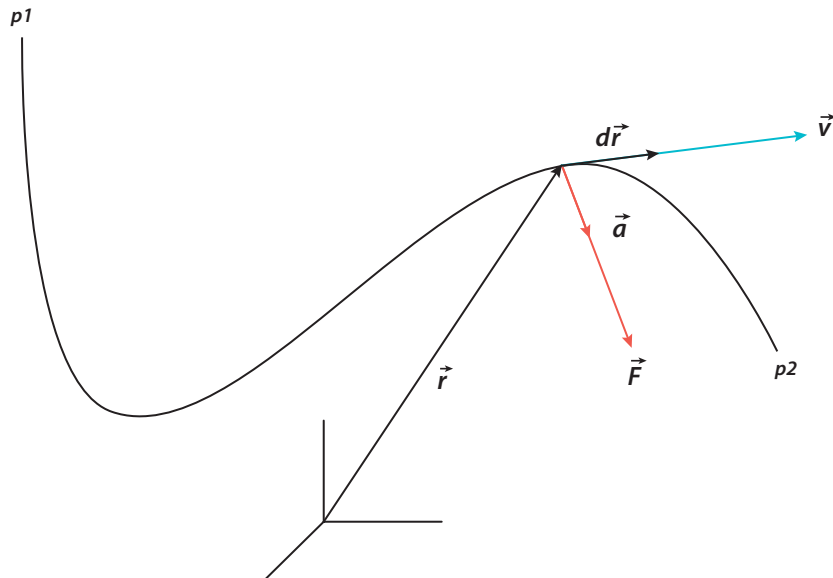
$$W = \int_{p1}^{p2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = k \int_{p1}^{p2} (x dx + 2x dy) = k \int_0^1 (x dx + 2x dx) = 5k \int_0^1 x dx = \frac{5}{2} \text{ J} \quad (18.3)$$

Etter denne lille øvelsen, la oss gå over til å se på noen kjente og kjære lover. I et lukket system, for eksempel vårt univers, er den totale bevegelsesmengden bevart. Bevaring av bevegelsesmengde gir opphav til Newtons tre lover. Newtons andre lov  $\vec{F} = m\vec{a}$  uttrykker at akselerasjon er proporsjonal med kraften som anvendes på et legeme.

Dersom en tar linjeintegralet av kraften langs en kurve fra et punkt i rommet til et annet, Figur 18.2, får en følgende:

$$\int_{p1}^{p2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{p1}^{p2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (18.4)$$

Venstresiden av dette uttrykket, hvor en bare ser på kraftens komponent langs veien, gjenkjennes som definisjonen på begrepet «arbeid». Hva er det som gjør dette spesielle linjeintegralet så interessant?



Figur 18.2 Linjeintegralet fra posisjon p1 til p2

Da et legemes hastighet  $\vec{v}$  alltid er rettet langs til veien, og Newtons andre lov har den formen den har, kan høyresiden av forrige ligning regnes ut:

$$\int_{p_1}^{p_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m \int_{p_1}^{p_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_{p_1}^{p_2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \int_{p_1}^{p_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad (18.5)$$

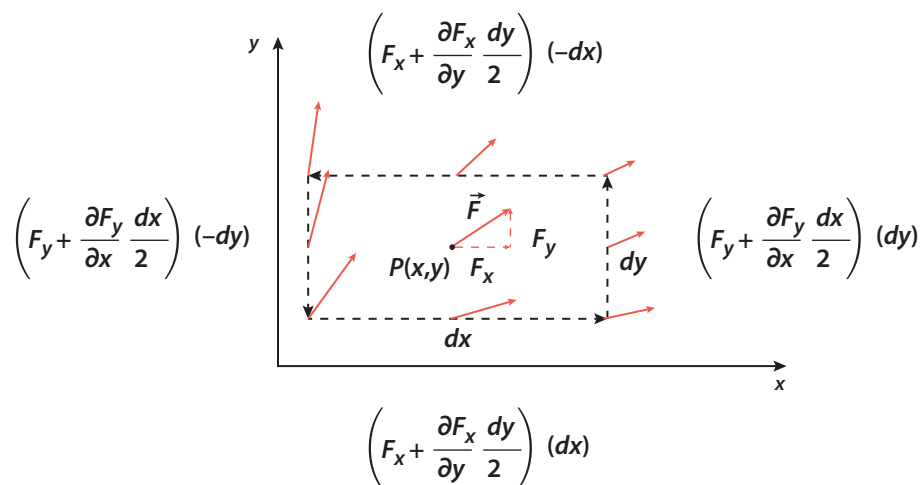
Å ta linjeintegralet av Newtons andre lov er altså profitabelt siden høyresiden av ligningen får den enkle form som vist ovenfor. Venstresiden av ligning (18.5), det såkalte arbeidet, er altså lik forskjellen i kvadratet av hastighetene kun i endepunktene multiplisert med faktoren  $\frac{1}{2}m$ . Dersom sammenhengen mellom kraft  $\vec{F}$  og bevegelse hadde vært en annen, for eksempel Aristoteles' gale tilnærming  $\vec{F} = k\vec{v}$ , ville en ikke fått et slikt enkelt uttrykk.  $\frac{1}{2}mv^2$  gjenkjennes som fysikkens kinetiske energi. Kraften  $\vec{F}$  representerer her summen av kreftene som virker på et legeme. Vi har da følgende setning: Arbeidet som summen av kreftene gjør på et legeme, er lik endringen av legemets kinetiske energi.

For å kunne regne ut arbeidet ved å ta linjeintegralet av kraften  $\vec{F}$  må en kjenne kraftfeltet som virker på legemet. I et lukket system er naturens krefter konservative. Gravitasjonskraften er et eksempel på en konservativ kraft. At en kraft er konservativ, betyr at dersom en tar et vilkårlig lukket linjeintegral av kraftfeltet, vil det alltid være null.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (18.6)$$

En konsekvens av det er at dersom en tar linjeintegralet av kraftfeltet fra et punkt til et annet, så er det kun bestemt av endepunktene og ikke veien som er anvendt mellom dem.

La oss prøve å regne ut dette linjeintegralet for et lite linjeintegral, Figur 18.2, mot klokken langs  $dx$  og  $dy$ , indikert med stiplede piler, i to dimensjoner hvor kraftfeltet  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  er gitt. Obs! Siden vi ser på et lite stykke  $dx dy$ , «forsvinner» integraltegnet.



**Figur 18.3** Linjeintegralet av kraftfeltet  $\vec{F}$  i to dimensjoner



$$\left(F_x - \frac{\partial F_x}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) (dx) + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) (dy) + \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) (-dx) + \left(F_y - \frac{\partial F_y}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) (-dy) = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dx dy = 0 \quad (18.7)$$

Det medfører at:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (18.8)$$

Det betyr, som vi skal se, at en alltid kan innføre såkalte potensialer når en opererer med konservative krefter:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) \quad (18.9)$$

$\vec{\nabla}$  er her en differensialoperator kalt «deloperatoren»,  $\vec{\nabla} E_p$  er gradienten til  $E_p$ , og minustegnet er bare satt inn av konvensjonelle grunner. Gradienten forteller hvor mye en funksjon,  $E_p$  i dette tilfellet, endrer seg i en gitt retning.

Ved innsetting i vårt todimensjonale tilfelle får en:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right) = 0 \quad (18.10)$$

Og tro meg, dette gjelder for tre dimensjoner også. Det blir bare mer regning.

Linjeintegralet får da følgende form:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r} = E_{p1} - E_{p2} \quad (18.11)$$

Det hele kan nå settes sammen:

$$\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = E_{p1} - E_{p2} \quad (18.12)$$

hvor høyresiden representerer endring i det som fysikken kaller potensiell energi og venstresiden endring i kinetisk energi. Ved å samle energibidragene på hver side får en:

$$E_{\text{konstant}} = \frac{1}{2} m v_2^2 + E_{p2} = \frac{1}{2} m v_1^2 + E_{p1} \quad (18.13)$$

Summen av kinetisk og potensiell energi kalles mekanisk energi. Ved å ta linjeintegralet av Newtons andre lov  $\vec{F} = m\vec{a}$ , som var en konsekvens av bevaring av bevegelsesmengde, og brukt det faktum at naturens lover er konservative, har en funnet en ny bevaringslov: Den mekaniske energien til et system som bare er påvirket av konservative krefter, er konstant.

La oss for moro skyld regne ut den potensielle energien for gravitasjon. Gravitasjon er en såkalt sentralkraft hvor kraftens størrelse er gitt av avstanden mellom to legemer og deres masser. Radielt får en at kraften er gitt ved  $-\frac{dE_p}{dr}$ , og det kan brukes til å finne den potensielle energien.

For gravitasjonskraften har en:

$$E_p = -\int_{r_a}^{r_b} G \frac{m_{test} M}{r^2} dr = G m_{test} M \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (18.14)$$

Dersom  $M$  representerer jordens masse og  $m_{test}$  holder seg i nærheten av jordens overflate, kan uttrykket omformes til noe vi har sett tidligere:

$$E_p = G m_{test} M \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = G m_{test} \frac{M}{r_b r_a} (r_a - r_b) \approx m_{test} g h \quad (18.15)$$

Hvor  $g = G \frac{M}{r^2}$  er tyngdens akselerasjon, og  $h$  er høyden over bakken.

Energiloven blir da seende slik ut:

$$E_{konstant} = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \quad (18.16)$$

# 19

## Kapittel 19

---

# Et graverende eksempel

«Geometry does not teach us to draw lines,  
but requires them to be drawn.»

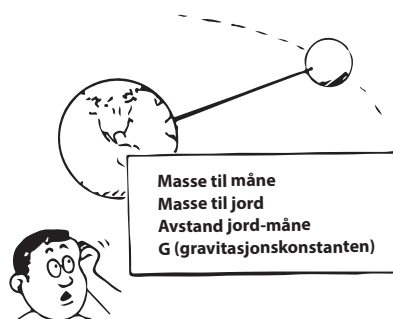
Isaac Newton (1642–1727)

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Gravitasjon, Keplers lover, utledning av gravitasjonsloven med hjelp av Newton, gravitasjonskonstanten, total mekanisk energi, gravitasjonspotensial, effektivt gravitasjonspotensial, energibrønn, ulike banetyper, sammenhengen mellom spinn og energi og flatekonstanten, unnslipningshastighet

---

Internettet er en kilde til konspirasjon og inspirasjon. Der finner du noen som tror at jorden er flat, og andre som hevder at fysikkens lover alle kan sammenfattes med strenger i ti til tolv dimensjoner. Hva ville vært det første Newton hadde googlet hvis han fikk muligheten? Vel, både han og hans samtidige hadde problemer med å akseptere at krefter kunne virke over avstand uten noen direkte kontakt mellom legemene. Jeg tipper at han ville skrevet «gravity and string».



Resultatet av nettsøket «gravity and string» er magert. Jeg har prøvd det selv. Jeg fant kun ett fornuftig treff, og resultatet ser du i Figur 19.1.

Dette bildet ble ikke funnet i en grensesprengende ny teori, men som en liten øvingsoppgave om gravitasjon. La oss prøve å regne ut snordragets størrelse. Basert på de opplysningene som er gitt i Figur 19.1, må en bare finne frem formelen for gravitasjonskraften:

**Figur 19.1** Snordrag som årsak til gravitasjon

$$F = G \frac{mM}{r^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{7,4 \cdot 10^{22} \cdot 6,0 \cdot 10^{24}}{(3,8 \cdot 10^8)^2} \text{ N} = 2,27 \cdot 10^{20} \text{ N} \quad (19.1)$$

Det var litt av et snordrag! Dersom vi antar at månen beveger seg tilnærmet i en sirkel rundt jorden, kan vi finne banefarten med:

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad (19.2)$$

$$v = \sqrt{\frac{rF}{m}} = \sqrt{\frac{3,8 \cdot 10^8 \cdot 2,27 \cdot 10^{20}}{7,4 \cdot 10^{22}}} \text{ m/s} = 1081,0 \text{ m/s} \quad (19.2)$$

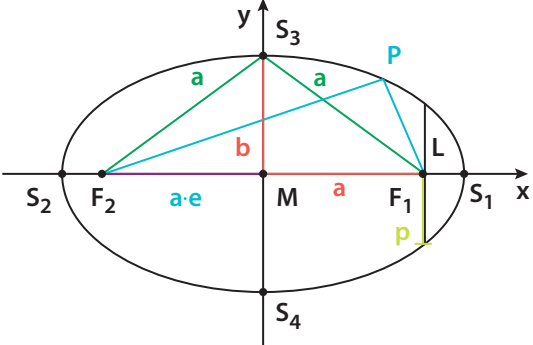
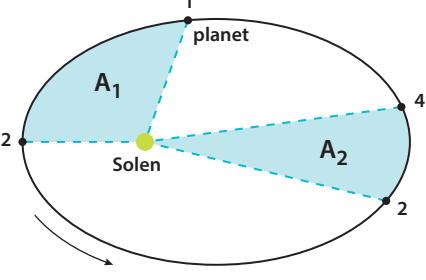
Månens fart er cirka en kilometer i sekundet. Hvor lang tid bruker den på en runde rundt jorden?

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 3,8 \cdot 10^8}{1,081 \cdot 10^3} \text{ s} = 2208837,6 \text{ s} = 25,6 \text{ døgn} \quad (19.3)$$

Resultatet vårt er litt i underkant av fasit som er 27,3 døgn, men så var det jo bare en røff overslagsregning. Månen går egentlig i en ellipsebane og er påvirket av solen også.

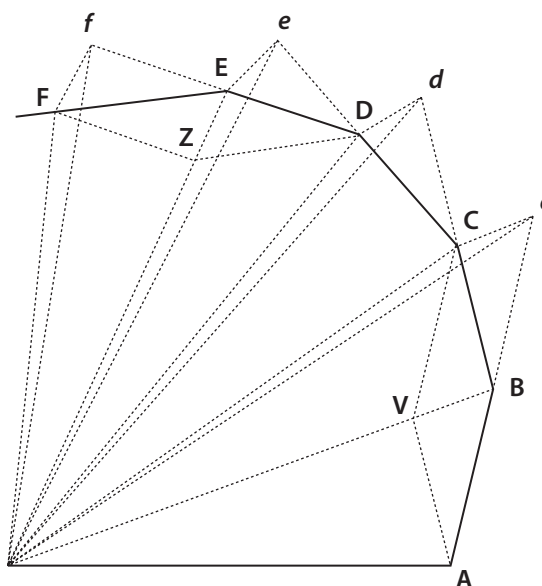
Formelen (19.1) som vi brukte, var det Newton som kom frem til i sitt berømte verk *Principia* [7], uttales prinkipia, i 1687. Ved hjelp av Keplers lover og geometriske betraktninger fant han gravitasjonsloven. Onde tunger vil ha det til at han brukte geometri i *Principia* fordi han ikke ville vise verden at han hadde oppdaget infinitesimalregning med derivasjon og integrasjon. For oss er det bare en fordel, fordi den geometriske metoden er meget mer opplysende og underholdende. Dersom du ikke skulle huske Keplers lover, så kan du ta en titt i Tabell 19.1. Eksentrisiteten  $e$  er et mål på hvor flattrykt ellipsen er. Jo nærmere  $e$  er 1, jo flattere er ellipsen. Er  $e = 0$ , er ellipsen en sirkel.

Tabell 19.1 Keplers lover

#	Keplers lover	Illustrasjon og formler
1	Planeter beveger seg i ellipser med solen i det ene brennpunktet. Her er $a$ halve lengden av ellipsens store akse.	 $F_1P + PF_2 = 2a$ <p>Eksentrisitet <math>e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}</math></p> $p = \frac{1}{2}L = \frac{b^2}{a}$
2	En rett linje fra solen til planeten (posisjonsvektoren) beskriver like store flater, kalles flatekonstanten, i like lange tidsrom.	
3	Kvadratet av omløpstiden $T$ for en planet er proporsjonalt med tredje potens av dens gjennomsnittlige avstand $d$ fra solen	$T^2 \propto d^3$

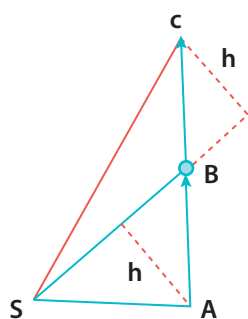
Nå må det medgis at Keplers lover ikke er naturlover i rette forstand, men mer kurve tilpasning av tidligere observasjoner av Mars gjort av Tycho Brahe fra den danske øyen Ven. At Kepler fant ut at Mars hadde en ellipsebane er imponerende, da forskjellen på den store og den lille aksen,  $\frac{2a}{2b}$ , er cirka 1,005.

Da er det bare å finne frem *Principia* og begynne lesningen av seksjon 2 «Of the invention of sentripetal forces». Det første som møter en, er Figur 19.2. Oi sann, gode Newton brukte bevegelsesdiagrammer han også.



Figur 19.2 Newtons utgangspunkt

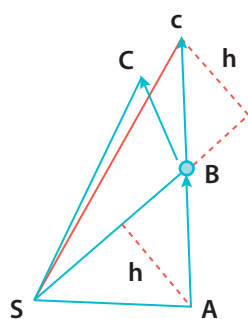
Vi skal nå prøve å følge i Newtons fotspor og se hvor mye vi kan lære om gravitasjon og andre ting underveis. Newton starter med sin første lov som sier at dersom summen av kreftene som virker på et legeme er null, vil legemet fortsette en jevn, rettlinjert bevegelse.



Figur 19.3 Newtons utgangspunkt

I Figur 19.3 ser vi på et legeme som beveger seg fra A til B med rettlinjet, jevn hastighet i et tidsrom  $\Delta t$ . De blå vektorene indikerer hastighet. Dersom summen av kreftene som virker på legemet er null, vil det fortsette mot c og nå c etter enda et tidsrom  $\Delta t$ . Arealene SAB og SBc vil være like store.

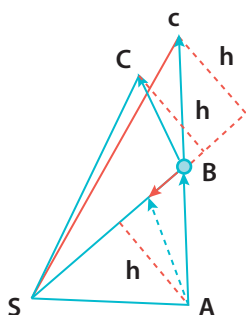
Det neste Newton gjør, er å se hva som skjer dersom legemet utsettes for en kraft i punkt B og endrer retning mot C. Dermed er Newtons andre lov også anvendt. Figur 19.4 viser et eksempel på dette.



Figur 19.4 Newtons utgangspunkt

Så tar Newton i bruk Keplers andre lov som sier at i like lange tidsrom  $\Delta t$ , så sveipes det ut like store arealer. SAB og SBC må altså være like store. Hvordan kan en få til det, og hvilke konsekvenser får det? Figur 19.5 illustrerer det.

Vi ser at for at SAB og SBC skal ha likt areal, så må kraften som virker i B være rettet mot S (SB og Cc må være parallelle). Kraftens størrelse, den røde vektoren, er gitt av forskjellen mellom hastighetene. Den stiplede blå vektoren er neste hastighet parallellforskjøvet tilbake slik en gjør i bevegelsesdiagrammer. Slik kan vi fortsette å tegne som Newton gjorde i Figur 19.2 for å se at konsekvensen av Keplers andre lov er at kraften må være en sentralkraft mot S. Siden kraften virker direkte mot S (solen), har vi allerede her en indikasjon på at Newtons tredje lov som sier at kraft og motkraft virker direkte mot hverandre, er med i spillet.



**Figur 19.5** Keplers andre lov resulterer i at gravitasjonskraften må være en sentralkraft

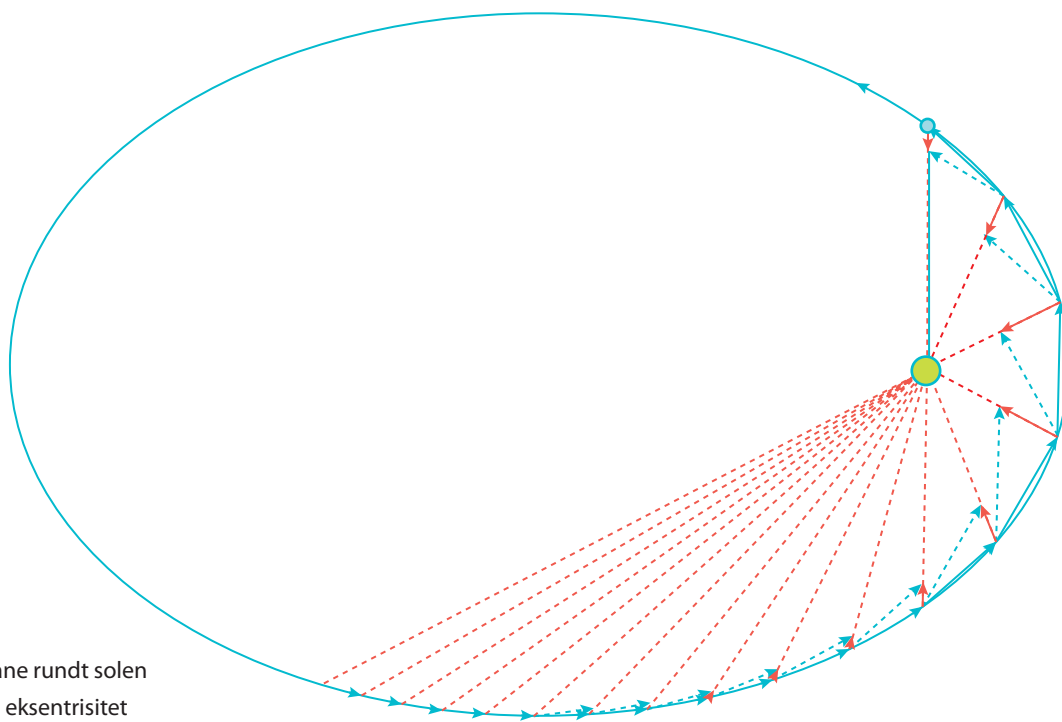
Vi ser at posisjonsvektoren  $\vec{r}$  (SA, SB, SC osv.) er parallell med gravitasjonskraften som vi kan kalle  $\vec{F}$ . Kraftmomentet for dette systemet, sol og for eksempel jord, blir:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad (19.4)$$

Dermed er spinnet  $\vec{L}$  for systemet en bevart størrelse. Keplers andre lov er bare en annen måte å si det på.

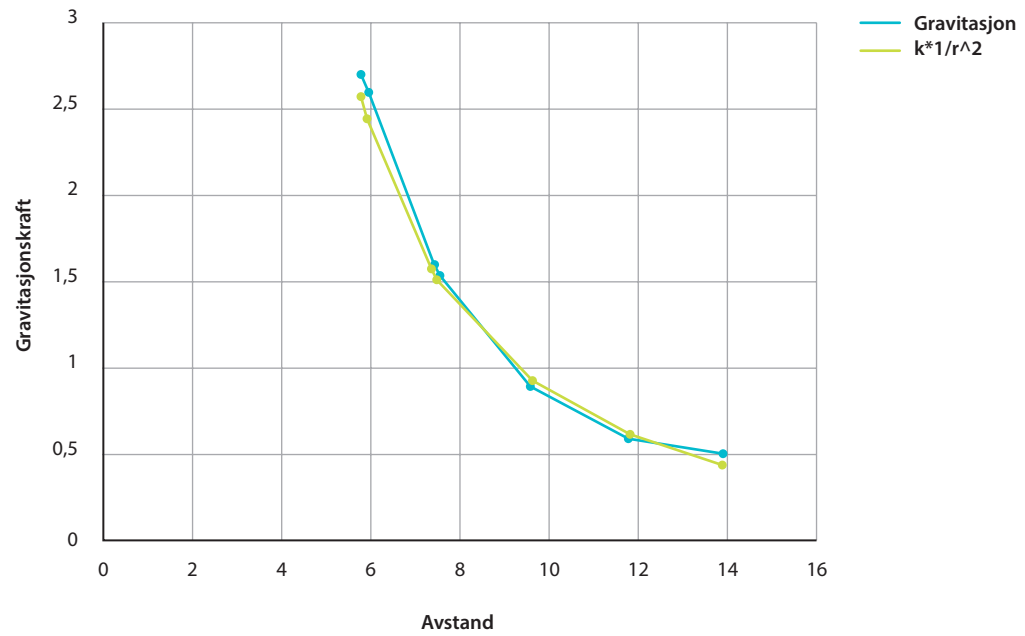
Ved hjelp av enkel geometri, Newtons første og andre lov og Keplers andre lov har vi funnet at gravitasjonskraften er en sentralkraft som virker langs posisjonsvektoren mellom sol og planet, og at spinnet er bevart.

Så slutter Newton å bruke bevegelsesdiagrammer, men før vi går videre, kunne det være moro å tegne et for jorden som følger en ellipsebane rundt solen. Det er gjengitt i Figur 19.6.



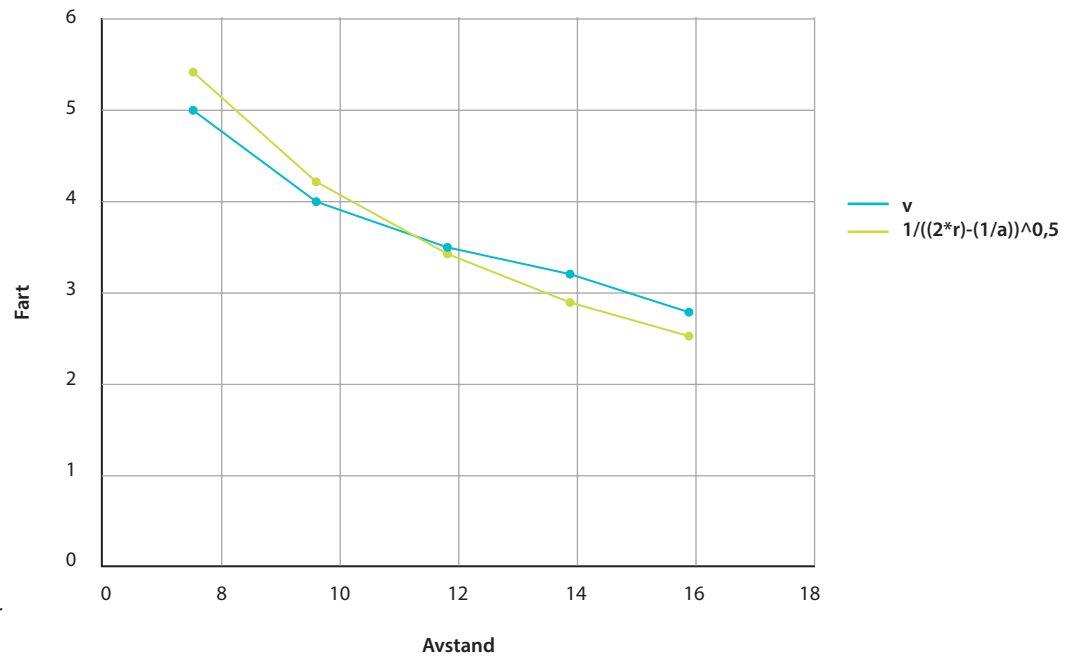
**Figur 19.6** Jordens bane rundt solen med sterkt overdrevet eksentrisitet

I Figur 19.6 er de blå pilene hastighetsvektorer, de røde kraftvektorer og de røde stiplede linjene markerer like areal som sveipes ut på lik tid. En ser med en gang at hastigheten og kraften er større jo nærmere solen man er, og at solen er i det ene brennpunktet av ellipsen. Er det mulig å finne ut noe om denne kraftens relasjon til avstanden mellom jord og sol? Vel, det er bare å måle lengden på den røde vektoren versus lengden mellom sol og jord,  $r$ , på samme sted. I Figur 19.7 er sammenhengen gitt.

Gravitasjonskraften er proporsjonal med  $1/r^2$ 

**Figur 19.7** Ellipsebaner gir en gravitasjonskraft  $F \propto \frac{1}{r^2}$

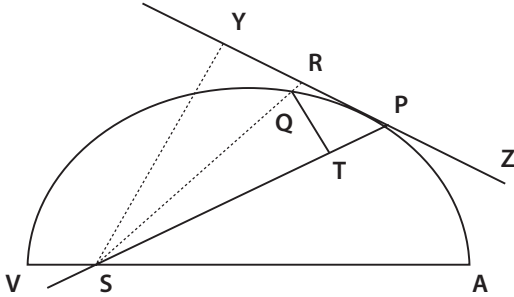
Hva med farten? Da er det bare å måle lengden på de blå vektorene versus avstand til solen som vist i Figur 19.8.

Banefart er proporsjonal med  $1/((2*r)-(1/a))^{0,5}$ 

**Figur 19.8** Ellipsebaner gir banefart  $v \propto \frac{1}{\sqrt{2r - \frac{1}{a}}}$



Når det gjelder Figur 19.8, må det medgis at jeg visste hva jeg var på jakt etter.  $a$  er halve lengden av ellipsens store akse. Som du ser, er kurvetilpasningene litt unøyaktig i endepunktene; det skyldes stor hastighetsforandring i nærheten av solen og små størrelser på hastighet og kraft lenger unna solen.



Figur 19.9 En vilkårlig bane

Tilbake til Newton. Det neste han gjør for å bevise  $F \propto \frac{1}{r^2}$  som vi har tegnet oss frem til i Figur 19.6 og vist i Figur 19.7, er å tegne opp en vilkårlig bane hvor et legeme beveger seg fra A til V. Ser vi på det lille stykket PQ, så forandrer legemet seg fra rettlinjett bevegelse med QR som vist i Figur 19.9 fra *Principia*.

Siden PQ er et lite stykke, kan en anta at akselerasjonen som endrer legemets bane fra rettlinjett til krum bevegelse er konstant. Galileo Galileis formel for sammenheng mellom tilbakelagt

avstand og tid når akselerasjonen er jevn, er gitt ved:

$$s = \frac{1}{2} a_{\text{legeme}} t^2 \quad (19.5)$$

Løser en denne formelen med hensyn på akselerasjonen, finner en:

$$a_{\text{legeme}} = \frac{2s}{t^2} \quad (19.6)$$

Kraften finner en ved å multiplisere med legemets masse:

$$F = m a_{\text{legeme}} = m \frac{2s}{t^2} \quad (19.7)$$

Vår  $s$  er QR, og da finner vi følgende uttrykk for kraften:

$$F \propto \frac{QR}{t^2} \quad (19.8)$$

Nå har vi jo fra Keplers andre lov som sier at i like lange tidsrom  $t$  sveipes det ut like store areal. Når P går mot Q, vil arealet SPQ i Figur 19.9 gå mot arealet som legemet sveiper ut. Vi har da følgende uttrykk for kraften:

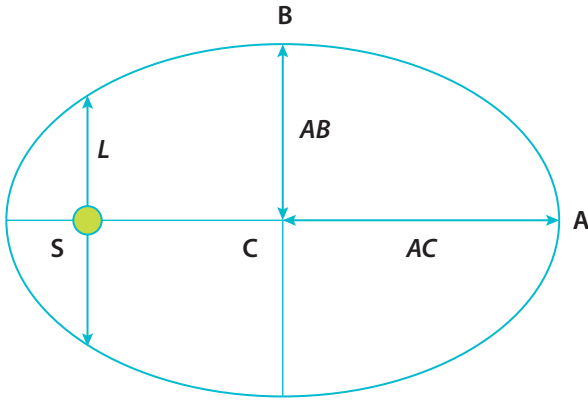
$$F \propto \frac{QR}{(SP \cdot QT)^2} = \frac{QR}{(SP)^2 \cdot (QT)^2} \quad (19.9)$$

Denne sammenhengen mellom kraft og linjestykket QR og arealet SPQ gjelder uansett hvilken kraft vi har med å gjøre. Det neste Newton ønsket å vise, var at dersom legemet går i en ellipsebane, slik som Kepler hadde vist med sin første lov, så må  $F \propto 1/r^2$  hvor  $r$  er posisjonsvektor.



er lik  $2AC$  ( $PH + PS = 2AC \Rightarrow PI + PS = 2AC \Rightarrow (PI + PS)/2 = AC = EP$  hvilket skulle bevises).

$$AC = PE \quad (19.11)$$



For ellipser har en noe man kaller prinsipal latus rectum, linjen L, som er vist i Figur 19.11.

Formelen for den er gitt ved:

$$L = \frac{2(BC)^2}{AC} \quad (19.12)$$

Så skriver en opp:

$$\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{QR}{Pv} \quad (19.13)$$

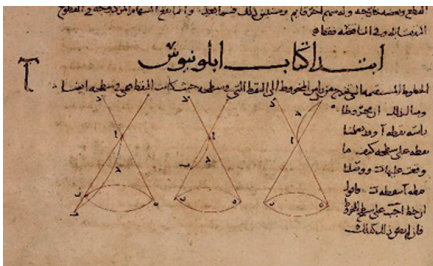
**Figur 19.11** Prinsipal latus rectum L

Forholdet mellom  $\frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC}$  siden trekantene PEC og PXv er kongruente. Videre får en siden  $QR = Px$ :

$$\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{QR}{Pv} = \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC} \quad \text{rel I} \quad (19.14)$$

Formel (9.14) var den første relasjonen Newton trengte. Den neste er rimelig enkel å hente ut:

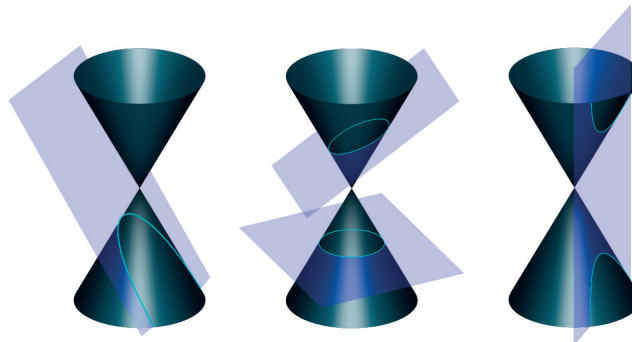
$$\frac{L \cdot Pv}{Gv \cdot Pv} = \frac{L}{Gv} \quad \text{rel II} \quad (19.13)$$



**Figur 19.12** Apollonius' bok om kjeglesnitt

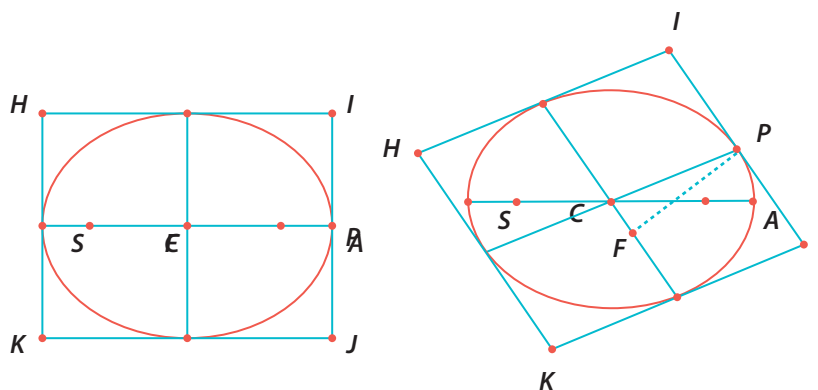
For å finne neste relasjon må Newton ta Apollonius av Perga sin bok om kjeglesnitt i bruk. I Figur 19.12 ser du en side fra denne boken i arabisk oversettelse fra 800 tallet.

Skulle du mot formodning ikke huske hva kjeglesnitt er, så ser du dem i Figur 19.13.



**Figur 19.13** Kjeglesnittene parabel, ellipse, sirkel og hyperbel





**Figur 19.15** Parallelogram med samme flateinnhold

Flateinnholdet av en fjerdedel av parallelogrammet blir:

$$CA \cdot CB = CK \cdot PF = CD \cdot PF \quad (19.18)$$

Det gir:

$$\frac{CA}{PF} = \frac{CD}{CB} \quad (19.19)$$

Vi setter (19.19) og (19.17) sammen:

$$\frac{(Qx)^2}{(QT)^2} = \frac{(EP)^2}{(PF)^2} = \frac{(AC)^2}{(PF)^2} = \frac{(CD)^2}{(CB)^2} \quad (19.20)$$

Her brukte vi det faktum at  $AC = PE$  som var det første vi beviste for ellipsen. Da har vi den siste relasjonen vi trenger:

$$\frac{(Qx)^2}{(QT)^2} = \frac{(CD)^2}{(CB)^2} \quad \text{rel V} \quad (19.21)$$

La oss samle relasjonene og ta dem i bruk:

$$\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{AC}{PC} \quad \text{rel I} \quad (19.22)$$

$$\frac{L \cdot Pv}{Gv \cdot Pv} = \frac{L}{Gv} \quad \text{rel II} \quad (19.23)$$

$$\frac{Pv \cdot Gv}{(Qv)^2} = \frac{(PC)^2}{(DC)^2} \quad \text{rel III} \quad (19.24)$$

$$\frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} = 1 \quad \text{rel IV} \quad (19.25)$$

$$\frac{(Qx)^2}{(QT)^2} = \frac{(CD)^2}{(CB)^2} \quad \text{rel V} \quad (19.26)$$

Newton ønsket å vise følgende (19.10):

$$\frac{\left(\frac{BC}{AC}\right)QR}{(QT)^2} = \frac{L \cdot QR}{(QT)^2} = \left(\frac{2CP}{GV}\right) \frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} \quad (19.27)$$

Da kan vi starte med relasjon I:

$$L \cdot QR = \frac{AC}{PC} L \cdot Pv \quad (19.28)$$

Gå videre med II:

$$L \cdot QR = \frac{AC}{PC} \frac{L}{Gv} Gv \cdot Pv \quad (19.29)$$

Og så III:

$$L \cdot QR = \frac{AC}{PC} \frac{L}{Gv} \frac{(PC)^2}{(DC)^2} (Qv)^2 \quad (19.30)$$

Det kan omskrives til:

$$L \cdot QR = \frac{AC}{PC} \frac{L}{Gv} \frac{(PC)^2}{(DC)^2} \frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} (Qx)^2 \quad (19.31)$$

Da er det bare å bruke relasjon V:

$$L \cdot QR = \frac{AC}{PC} \frac{L}{Gv} \frac{(PC)^2}{(DC)^2} \frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} \frac{(CD)^2}{(CB)^2} (QT)^2 \quad (19.32)$$

Setter en inn for prinsippal latus rectum, kan uttrykket omformes til:

$$\frac{L \cdot QR}{(QT)^2} = \frac{AC}{PC} \frac{\left(\frac{2(BC)^2}{AC}\right)}{Gv} \frac{(PC)^2}{(DC)^2} \frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} \frac{(CD)^2}{(CB)^2} = \left(\frac{2CP}{Gv}\right) \frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} = \left(\frac{AC}{Gv}\right) \frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} \quad (19.33)$$

Når Q går mot P, vil Gv bli lik AC og  $\frac{(Qv)^2}{(Qx)^2} = 1$ . Vi sitter da igjen med:

$$\frac{L \cdot QR}{(QT)^2} = 1 \quad (19.34)$$

I formel (19.9) hadde vi et generelt uttrykk for en avbøyende kraft:

$$F \propto \frac{QR}{(SP \cdot QT)^2} = \frac{QR}{(SP)^2 \cdot (QT)^2} = \frac{1}{L \cdot (SP)^2} \quad (19.35)$$

Newton har dermed bevist at siden planetene går i ellipsebener, må gravitasjonskraften være proporsjonal med det inverse av kvadratet av posisjonsvektoren mellom sol, som er i det ene av ellipsens brennpunkter, og planet;  $r = SP$ .

Setter vi inn for ellipsebane, får vi:

$$F \propto \frac{QR}{(SP)^2 \cdot (QT)^2} = \frac{1}{L \cdot (SP)^2} \quad (19.36)$$

For å komme videre må vi se på forholdet mellom utspent areal og prinsippalatus rectum. I løpet av en periode  $T$  utspennes hele ellipsen, og den har et areal likt  $2\pi AC \cdot BC$ .

$$\frac{(SP)^2 \cdot (QT)^2}{\frac{1}{2}L} = \frac{\left(\frac{2\pi AC \cdot BC}{T}\right)^2}{\frac{1}{2} \frac{(BC)^2}{AC}} = \mu \quad (19.37)$$

$$\mu = \frac{4\pi^2(AC)^3}{T^2} \quad (19.38)$$

Av Keplers tredje lov følger det at forholdene mellom halve store akse ( $AC$ ) i tredje og omløpstid kvadrert er konstant.

$$\frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{(AC)^3}{T^2} = \frac{(AC_1)^3}{(T_1)^2} = \dots = \text{konstant} \quad (19.39)$$

Det betyr at  $\mu$  er konstant. Dermed kan vi skrive gravitasjonskraften, ved å bruke (19.37), som:

$$F \propto QR = \frac{(SP)^2 \cdot (QT)^2}{L \cdot (SP)^2} \quad (19.40)$$

$$F \propto \mu \frac{1}{(SP)^2} \quad (19.41)$$

Da kraften er proporsjonal med legemets masse  $m$ , får vi videre:

$$F \propto \mu \frac{m}{(SP)^2} \quad (19.42)$$

Det siste Newton gjør er å bruke sin tredje lov om kraft og motkraft. Sol (masse  $M$ ) og planet (legeme) trekker på hverandre med like stor og motsatt rettet kraft.

$$F \propto \mu \frac{mM}{(SP)^2} \quad (19.43)$$

Ved å tilpasse ved måling og til de enheter en måtte ønske å bruke, er vi fremme ved resultatet:

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (19.44)$$

Her er  $G$  gravitasjonskonstanten ( $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ). I tillegg viste Newton at parabelbaner og hyperbelbaner var mulig med en gravitasjonslov som gikk som  $\frac{1}{r^2}$ .

Da er  $\mu = GM = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$  og Keplers tredje lov kan skrives som:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (19.45)$$

For å oppsummere:

#	Veien til Newtons gravitasjonslov
1	Newton viser at for rettlinjert bevegelse hvor summen av krefter som virker er null eller fraværende vil et legeme sveipe ut like store arealer, sett fra et sted, i like tidsrom. Newtons første lov blir brukt.
2	Newton introduserer sin andre lov slik at legemet ikke lenger følger en rett linje.
3	Så brukes Keplers andre lov om utspenning av like arealer på lik tid til å vise at en må ha en sentralkraft.
4	Keplers første lov om ellipsebaner brukes til å finne ut at gravitasjonskraften er omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden mellom legemet og solen, og at solen er i det ene brennpunktet av ellipsen.
5	Keplers tredje lov om omløpstider versus halve ellipsens store akse brukes til å bestemme gravitasjonskraftens konstant.
6	Newtons tredje lov om at kraft og motkraft er like store og motsatt rettet, brukes for å introdusere massen til sentrallegemet (solen) i den endelige formelen.

Hva med den mekaniske energien i systemet? Den er som vanlig summen av kinetisk og potensiell energi. Siden gravitasjon er en konservativ kraft (integralet av kraften langs en lukket bane er null  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ), kan vi finne potensialet ved å integrere kraften langs en radiell linje utover fra  $r_1$  til  $r_2$ .

$$E_p = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1} \quad (19.46)$$

Dersom vi befinner oss på det store legemet, for eksempel jorden, med masse  $M$ , og et testlegeme  $m_{test}$  holder seg i nærheten av jordens overflate, kan en skrive:

$$E_p = \frac{Gm_{test}M}{r_2} - \frac{Gm_{test}M}{r_1} = Gm_{test} \frac{M}{r_2 r_1} (r_2 - r_1) \approx m_{test} gh \quad (19.47)$$

Hvor  $g = G \frac{M}{r^2}$  er tyngdens akselerasjon og  $h$  er høyden over bakken.

Minustegnet i (19.46) skyldes at vi integrerer i motsatt retning av det store legemet, med masse  $M$ , sin kraft på det lille legemet. Dersom vi definerer potensialet til å være null uendelig langt borte,  $r_2 = \infty$ , får vi følgende generelle uttrykk for den potensielle energien:

$$E_p = -\frac{GmM}{r} \quad (19.46)$$

Totalenergien for systemet blir:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r} = \text{konstant} \quad (19.47)$$

Her representerer  $v$  farten til det lille legemet, og det forutsettes at det store legemet relativt sett er i ro.



Dersom vi deler opp hastigheten  $v$  i en komponent  $v_r$  som peker mot det store legemet og en  $v_\varphi$  som er normal på  $v_r$ , får vi:

$$\frac{1}{2}m(v_r + v_\varphi)^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\varphi^2 - \frac{GmM}{r} \quad (19.48)$$

Spinnet, som er konstant, er gitt ved:

$$L = mrv_\varphi \quad (19.49)$$

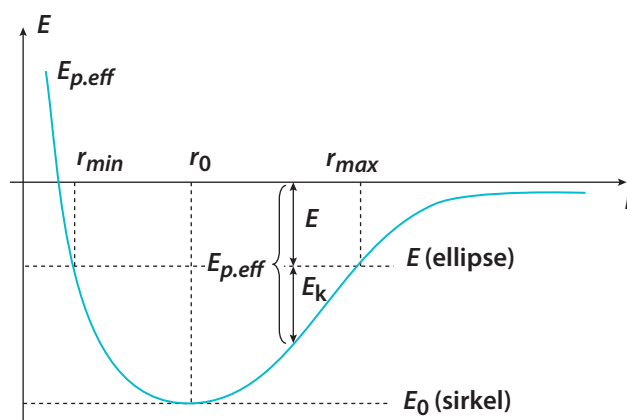
Vi kan derfor definere et nytt effektivt potensial:

$$E_{p,eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \quad (19.50)$$

Det første leddet i (19.50) vil gi størst bidrag når  $r$  er liten, når  $r$  er stor vil:

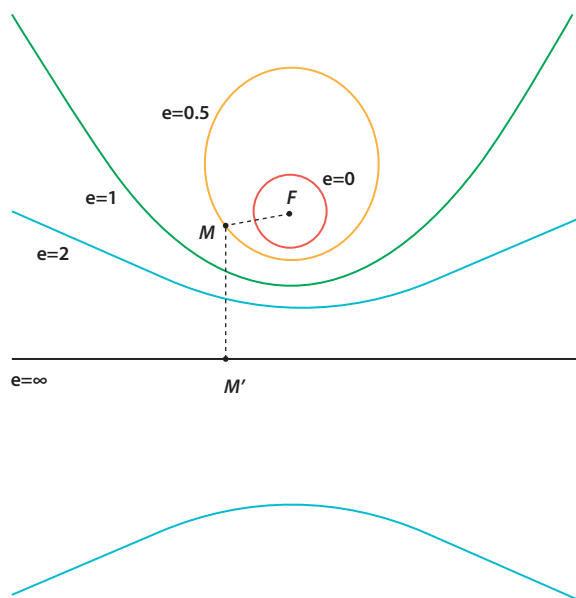
$$E_{p,eff} \approx -\frac{GmM}{r} \quad (19.51)$$

I Figur 19.16 ser du hvordan de to termene i den effektive potensielle energien lager en energibrønn mellom  $r_{min}$  og  $r_{maks}$  som det lille legemet med masse  $m$  må befinne seg innenfor. Spinnet hindrer det lille legemet å komme for nærme det store legemet, og den potensielle energien er ikke stor nok til å komme ut av brønnen.



**Figur 19.16** Effektiv energi som funksjon av avstand  $r$

Ved å derivere ligning (19.50) finnes at minimumsenergien gir en sirkelbane med radius  $r_0 = L^2/Gm^2M$ . I den banen har legemet farten  $v_\varphi = \sqrt{GM/r_0} = GmM/L$ . Dersom  $E_{p,eff} = 0$ , vil det lille legemet forlate det store legemet i en parabelbane, og er  $E_{p,eff} > 0$ , vil det bli en hyperbelbane.



**Figur 19.17** Eksentrisitet for ulike banetyper

Figur 19.17 viser hvordan eksentrisiteten varierer med ulike banetyper og fasonger. Når  $e = 0$  har vi en sirkel, når  $e < 1$  en ellipse,  $e = 1$  en parabel og hyperbel for  $e > 1$ .

Tilbake til vår elliptiske bane. Er det mulig å uttrykke det som blir bevart, spinn og energi, ved hjelp av ellipsens geometriske størrelser? Vi har jo allerede sett at Keplers andre lov om arealer ga bevaring av spinn. La oss regne ut  $r_{min}$  og  $r_{maks}$ . I begge tilfellene er den radielle farten  $v_r$  lik null, og den totale mekaniske energien er gitt ved:

$$E = \frac{L^2}{2m r^2} - \frac{GmM}{r} \quad (19.52)$$

Denne ligningen kan skrives:

$$r^2 + \frac{GmM}{E}r - \frac{L^2}{2m} = 0 \quad (19.53)$$

(19.53) er en annengradsligning som gir  $r_{min}$  og  $r_{maks}$ .

$$r = -\frac{GmM}{2E} \left( 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^3 M^2}} \right) \quad (19.54)$$

Summen av  $r_{min}$  og  $r_{maks}$  er  $2AC$ , og dermed har en følgende sammenheng mellom energi og den store aksen.

$$2AC = r_{min} + r_{maks} = -\frac{GmM}{E} \quad (19.55)$$

Vi ser at jo større energien blir, jo større blir banen. Går energien mot null, vil  $2AC$  gå mot uendelig og en har en parabelbane.

Multipliserer vi  $r_{\min}$  og  $r_{\max}$ :

$$r_{\min} \cdot r_{\max} = \left( -\frac{GmM}{2E} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^3 M^2}} \right) \right) \left( -\frac{GmM}{2E} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^3 M^2}} \right) \right) \quad (19.56)$$

Får vi:

$$r_{\min} \cdot r_{\max} = -\left( \frac{GmM}{2E} \right)^2 \frac{2EL^2}{G^3 m^3 M^2} = -\frac{L^2}{2mE} \quad (19.57)$$

Så kan vi ta Appolonius i bruk (19.14). L her er prinsipal latus rectum:

$$\frac{r_{\min} \cdot r_{\max}}{\left( \frac{1}{2}L \right)^2} = \frac{(AC)^2}{(BC)^2} \quad (19.58)$$

Ved å bruke ligning (19.12) fås:

$$\frac{r_{\min} \cdot r_{\max}}{\left( \frac{BC^2}{AC} \right)^2} = \frac{(AC)^2}{(BC)^2} \quad (19.59)$$

Det gir:

$$r_{\min} \cdot r_{\max} = (BC)^2 \quad (19.60)$$

Ved å bruke ligning (19.57) fås:

$$(BC)^2 = -\frac{L^2}{2mE} \quad (19.61)$$

Vi ser at jo større spinnets og energien er, jo større er  $BC$ . Keplers andre lov sier at like arealer blir sveipt ut på lik tid. Dersom vi ser på hele ellipsebanen, er arealet delt på omløpstiden  $T$  konstant. Da kan en skrive arealet:

$$\frac{2\pi \cdot AC \cdot BC}{T} = \text{konstant} \quad (19.62)$$

Ved å bruke Keplers tredje lov og sammenhengen vi fant i (19.38) og sette inn det vi har funnet for  $AC$  og  $BC$ , får vi:

$$\frac{2\pi \cdot AC \cdot BC}{2\pi \cdot \sqrt{\mu} \cdot (AC)^{3/2}} = \text{konstant} \quad (19.63)$$

Det vil si:

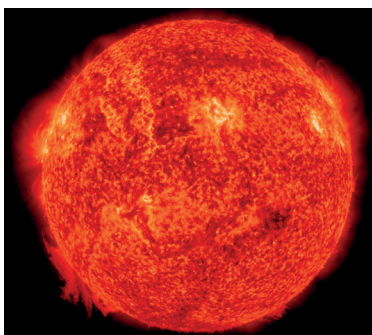
$$\frac{BC}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{AC}} = \text{konstant} \quad (19.64)$$

Ved å bruke ligningene (19.61) og (19.55) fås:

$$\frac{\sqrt{-\frac{L^2}{2mE}}}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{-\frac{GmM}{2E}}} = \text{konstant} \quad (19.65)$$

Det vil si:

$$\frac{L}{m} = \text{konstant} \quad (19.66)$$



**Figur 19.18** Hvilken masse har solen?

Som vi ser er det en konstant sammenheng mellom ellipsens flatekonstant og forholdet mellom spinn og den lille massen:  $\frac{L}{m}$ .

Sånn helt på tampen kan vi se på noen anvendelser. Hvilken masse har for eksempel solen som vi ser i Figur 19.18?

Vi antar at jorden går i en sirkelbane rundt solen. Avstanden til solen er  $r = 1,5 \cdot 10^{11}$  m. Perioden er et år:

$$T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \quad (19.67)$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{3,15 \cdot 10^7} \text{ m/s} = 3,0 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 30 \text{ km/s} \quad (19.68)$$

Sentripetalakselerasjonen blir:

$$a_{\text{jord}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(3,0 \cdot 10^4)^2}{1,5 \cdot 10^{11}} \text{ m/s}^2 = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 \approx 6 \text{ mm/s}^2 \quad (19.69)$$

Fascinerende liten akselerasjon. Så er det bare å finne frem gravitasjonsloven:

$$m a_{\text{jord}} = G \frac{mM}{r^2} \quad (19.70)$$

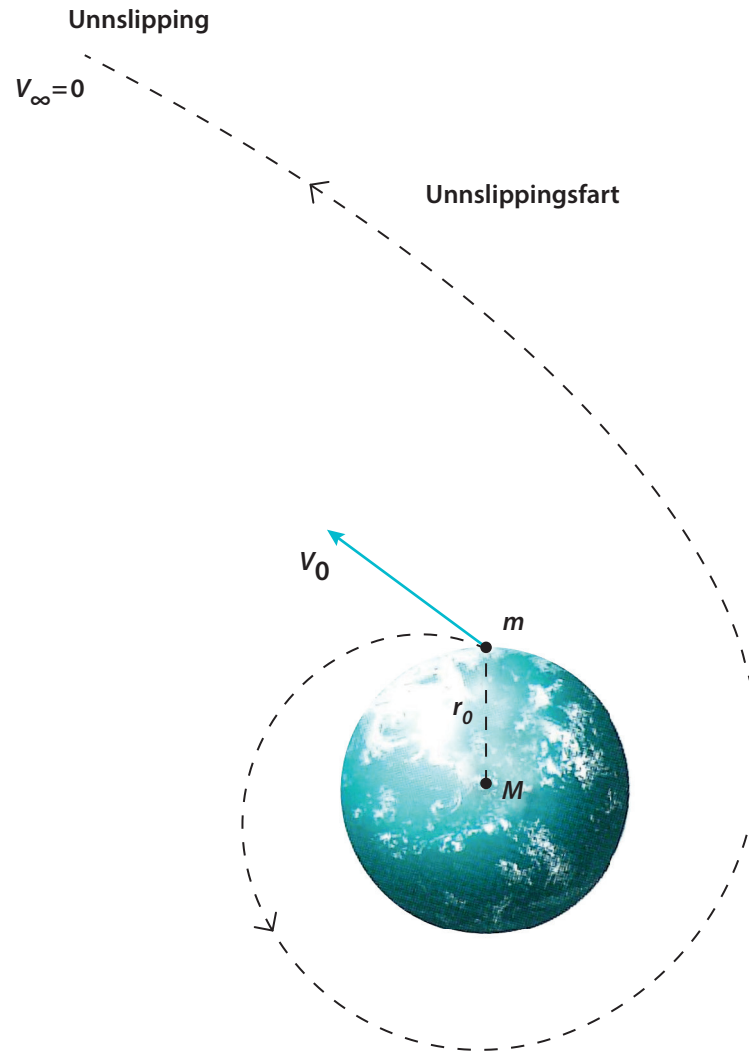
$$a_{\text{jord}} = G \frac{M}{r^2} \quad (19.71)$$

$$M = \frac{a_{\text{jord}} r^2}{G} = \frac{5,9 \cdot 10^{-3} \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ kg} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (19.72)$$

Neste anvendelse handler om romfart. Hva skal til for et romskip med masse  $m$  å unnsnippe jordens, masse  $M$ , gravitasjonsfelt og ta en tur i solsystemet?

Vi har funnet et uttrykk for den mekaniske energien (19.47). Unnslippingsfart  $V_0$  har en når:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GmM}{r_0} = 0 \quad (19.73)$$

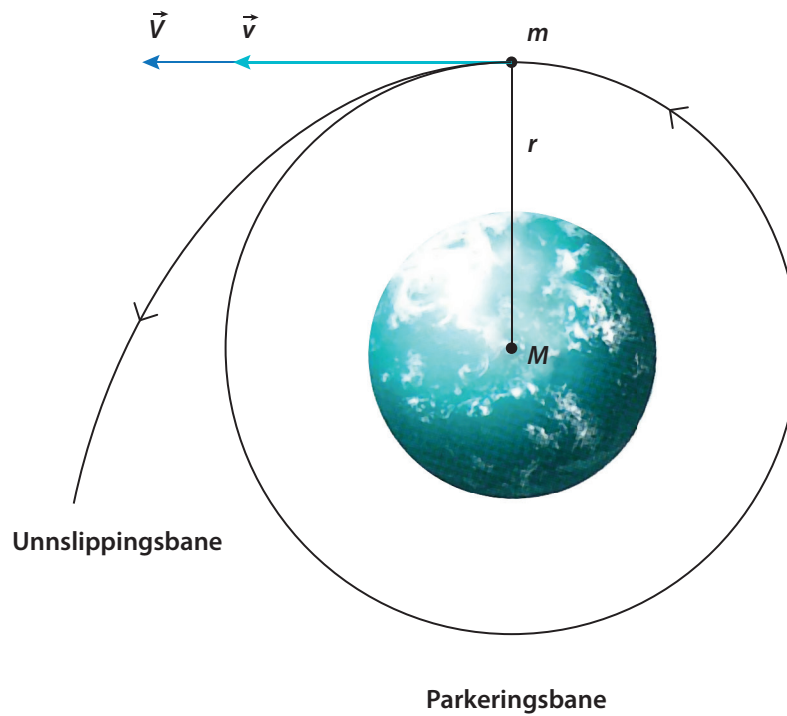


Figur 19.19 Unslippingsfart

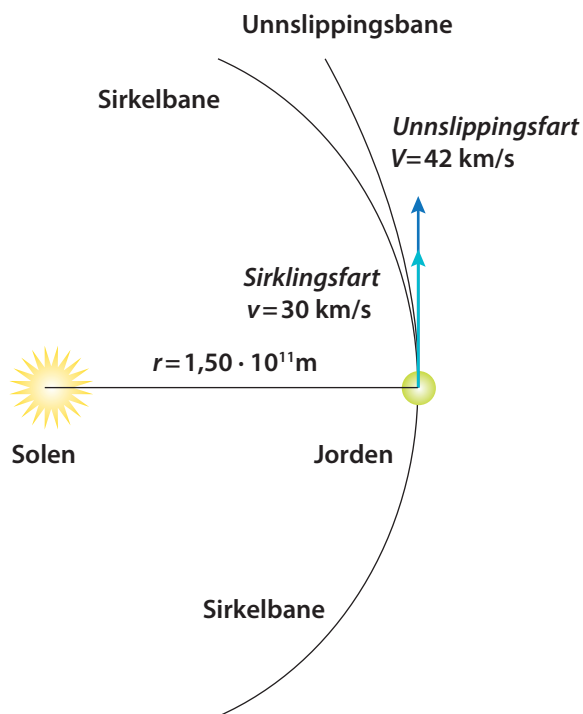
Hvor  $r_0$  er jordens radius. Løser vi med hensyn på  $v$ , finnes unslippingsfarten:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}} \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s} \quad (19.74)$$

Dette er en urealistisk fart, for skyter vi opp et romskip fra jordoverflaten med denne hastigheten som vist i Figur 19.19, vil friksjonen fra atmosfæren brenne opp romskipet. Det en gjør er å skyte romskipet opp i en parkeringsbane, se Figur 19.20, med radius  $r$  over atmosfæren. Det krever mindre energi og hastighet. Derfra videre ut i solsystemet med større hastighet.



Figur 19.20 Parkeringsbane



Figur 19.21 Ut av solsystemet

Unslippingsfart fra parkeringsbane:

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{2} \cdot v \quad (19.75)$$

Her er  $v$  farten i parkeringsbanen:

Hva skal til for å unnslipe solsystemet? I dette tilfellet er jordens bane rundt solen parkeringsbanen.

Jordens banefart:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{1,5 \cdot 10^{11}}} \text{ m/s} = 2,97 \cdot 10^4 \text{ m/s} \quad (19.76)$$

Unslippingsfarten ut av solsystemet:

$$V = \sqrt{2} \cdot v = \sqrt{2} \cdot 2,97 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 42 \text{ km/s} \quad (19.77)$$

# 20

## Kapittel 20

# Sånn sett

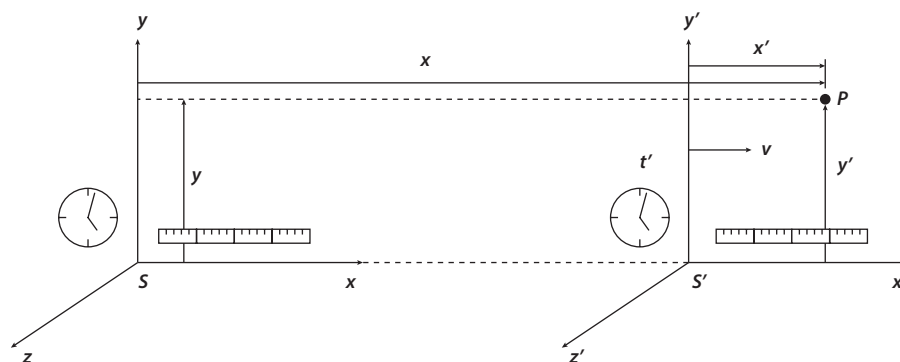
«Salviati: Man slipper en blykule fra mastetoppen på et skip som ligger i ro, og avmerker det stedet den treffer, som er nærmest ved mastens fot. Men hvis man fra samme sted slipper den samme kulen mens skipet er i fart, faller kulen like langt fra det første treffpunktet som skipet har beveget seg fremover i løpet av den tiden kulen har falt.»

*Dialog over de to verdenssystemer, Galileo Galilei (1564–1642)*

**LÆRINGSUTBYTTE:** Galileitransformasjon, inertialsystemer, absolutt tid, lorentztransformasjon, akselererte systemer, fiktive krefter, ekvivalensprinsippet, roterende koordinatsystemer, sentrifugalkraft, corioliskraft og eulerkraft

**Noen velger skip. Jeg sitter i et tog og leser Galileis flotte bok. Jeg ser opp fra boken, og utenfor er det et annet tog som beveger seg med jevn hastighet forbi oss, eller er det omvendt? Kanskje er det vi som beveger oss? Siden det er snakk om jevn bevegelse, så er det ikke lett å kjenne på kroppen hvilket alternativ vi er utsatt for. Jeg vender tilbake til boken igjen.**

Salviati som representerer Galileis syn på verden, prøver fortvilet å forklare kirkens mann som uvisst av hvilken grunn er kalt Simplicio, det som senere har fått tilnavnet galileitransformasjon. Den transformasjonen er mellom koordinater knyttet til referansesystemer som beveger seg i forhold til hverandre med konstant hastighet langs rette linjer (lineært). Disse referansesystemene kalles inertialsystemer fordi bevegelsesmengde forblir konstant ved transformasjonen, og dermed gjelder Newtons tre lover i alle inertialsystemer. Relativt sett blir hastighetene endret, men ikke bevegelsesmengdens bevaring eller Newtons lover.



**Figur 20.1** Galileitransformasjon

$$x' = x - vt \quad (20.1)$$

$$y' = y \quad (20.2)$$

$$z' = z \quad (20.3)$$

$$t' = t \quad (20.4)$$

Den siste av transformasjonsligningene sier at tiden er lik i alle inertialsystemer, og er et uttrykk for at tiden er absolutt i newtonsk fysikk. At vi ikke har snakket om inertialsystemer før i appendiks, skyldes det enkle faktum at vi er plassert på jorden i noe som tilnærmet er et inertialsystem, og så lenge hastighetene til det vi observerer er godt unna lyshastigheten, kan vi anse tiden som absolutt.



*Kommentar: I 1905 endret Albert Einstein meningsinnholdet til inertialsystemer. Han sa at alle fysikkens lover skulle være like i alle inertialsystemer, og en av disse lovene var at lyset har samme hastighet  $c$  i alle inertialsystemer. Konsekvensen av det var at galileitransformasjonen ble en tilnærming til den mer generelle lorenztransformasjon. Galileitransformasjonen gjelder kun ved lave hastigheter relativt til lyshastigheten. Einstein var villig til å ofre tid og lengdes absolutthet for å få lyshastigheten til å være lik i alle inertialsystemer.*

Lorenztransformasjonen:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (20.5)$$

$$y' = y \quad (20.6)$$

$$z' = z \quad (20.7)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (20.8)$$

*Vi ser at dersom  $v \ll c$ , så er galileitransformasjon grei å bruke som en transformasjon mellom inertialsystemer.*

Tilbake til galileitransformasjonen. I vårt eksempel har vi bare foretatt transformasjon i  $x$ -retning. Ved å derivere finner vi hastighetene:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \quad (20.9)$$

$$v_{x'} = v_x - v \quad (20.10)$$

Vi ser at vi kan finne hastigheten i det ene eller det andre referansesystemet når vi vet hvor raskt de beveger seg i forhold til hverandre. Bevegelsesmengden er altså konstant ved transformasjon. Newtons første lov overlever transformasjonen.

Hva med akselerasjon?

$$a_{x'} = \frac{dv_{x'}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} - \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = a_x \quad (20.11)$$

Siden  $v$  er konstant, blir akselerasjonen den samme i de to systemene, og Newtons andre og tredje lov er lik i de to systemene.

Hva om vi hadde prøvd oss på en litt mer generell transformasjon?

$$x' = x - f(t) \quad (20.12)$$

$$y' = y \quad (20.13)$$

$$z' = z \quad (20.14)$$

$$t' = t \quad (20.15)$$

For å finne hastigheter i de ulike koordinatsystemene er det bare å derivere:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{f(t)}{dt} \quad (20.6)$$

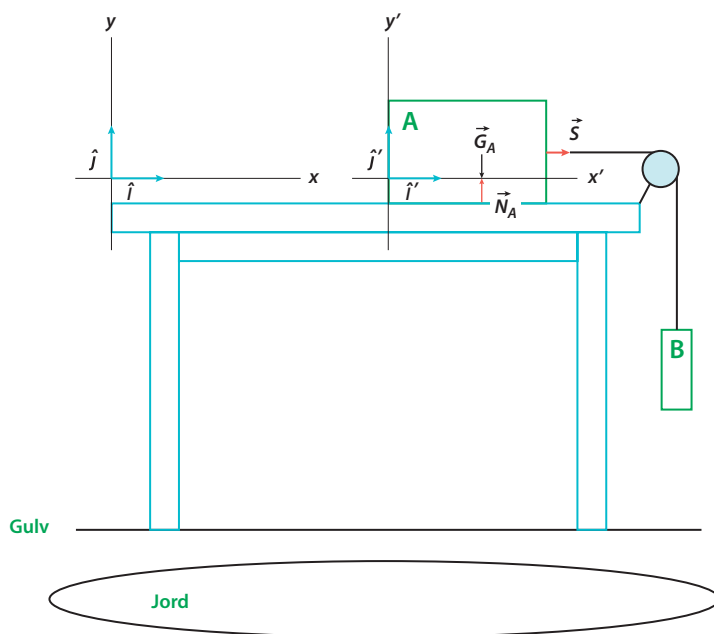
$$v_{x'} = v_x - \frac{f(t)}{dt} \quad (20.17)$$

$$a_{x'} = \frac{dv_{x'}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} - \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = a_x - \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad (20.18)$$

Her ser vi at vi får et ekstra ledd i siste ligning. Dersom vi multipliserer med en masse  $m$ , får vi følgende:

$$F_{x'} = m a_{x'} = m a_x - m \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad (20.19)$$

$$F_{x'} = F_x - m \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad (20.20)$$



Vi ser at dersom Newtons andre lov skal «overleve» denne transformasjonen, må  $m \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0$ , ellers har vi fått med oss en fiktiv kraft som skyldes at det merkede koordinatsystemets bevegelse relativt til det umerkede ikke lenger er lineær. Kraften kalles for fiktiv da den skyldes koordinatsystemets ulineære bevegelse og det faktum at denne kraften ikke har noen motkraft slik som reelle krefter har.

La oss gå tilbake til systemet vi så på i kapittel 2 «Innledende øvelse» og la et koordinatsystem følge den akselererende klossen og et annet stå i ro relativt til bordet. Se Figur 20.2.

Figur 20.2 Ulineær transformasjon

En observatør i referansesystemet som følger klossen vil observere at klossen er i ro i det referansesystemet. Observatøren vil derfor konkludere med at enten så virker det ingen krefter på klossen, eller så er summen av krefter lik null. Den eneste reelle kraften som får klossen til å bevege seg i forhold til bordet, er snordraget som gir klossen en akselerasjon på  $a$ . Det betyr at den fiktive kraften må være:

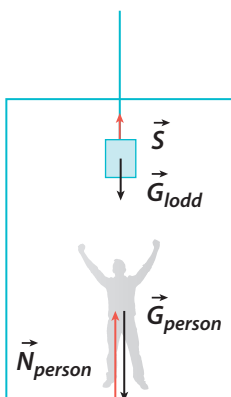
$$m \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = ma \quad (20.21)$$

Med litt integrering og randbetingelser satt til null finner en at:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 \quad (20.22)$$

Som er en god gammel kjenning når en har konstant akselerasjon.

Er du klar for en tur i heisen? I Figur 20.3 ser du en heis med en passasjer som har en masse på 80 kg og et lodd på ett kg hengende fra taket. Oppgaven er som følger:



**Figur 20.3** Heis med person og lodd

- Hvor stort er snordraget og passasjerens tyngde når heisen står i ro?
- Hvor stort er snordraget og passasjerens tyngde når heisen beveger seg nedover med 5 m/s?
- Hvor stort er snordraget og passasjerens tyngde når heisen akselerer oppover med 3 m/s<sup>2</sup>?
- Hvor stort er snordraget og passasjerens tyngde når heisen akselererer nedover med 3 m/s<sup>2</sup>?
- Hvor stort er snordraget og passasjerens tyngde når heisen er i fritt fall?

I a) blir det spurt om snordrag og tyngde på person når heisen står i ro. Siden heisen er i ro, må summen av kreftene som virker på henholdsvis lodd og person være null. Da blir:

$$S = m_{\text{lodd}}g = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{ N} \quad (20.23)$$

$$N_{\text{person}} = m_{\text{person}}g = 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 784,8 \text{ N} \quad (20.24)$$

I b) har heisen en fart nedover med 5 m/s. La oss tenke oss et koordinatsystem som følger heisen nedover. I forhold til et som står i ro, er det en lineær transformasjon mellom de to koordinatsystemene, og da så vi at Newtons andre lov var lik i de to systemene. Personen vil altså ikke merke noen tyngdeforskjell, og vårt snordrag vil være det samme som i a).

Når vi kommer til c), ser en at nå akselererer heisen oppover med  $3 \text{ m/s}^2$ . Heisen kan nå sammenlignes med et akselerert koordinatsystem. For personen i heisen som ikke kan se ut, vil det kjennes som han blir tyngre, og snordraget vil bli større:

$$S' = m_{\text{lodd}} \left( g + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1 \text{ kg} \cdot 12,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 12,81 \text{ N} \quad (20.25)$$

$$N_{\text{person}} = m_{\text{person}} \left( g + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 80 \text{ kg} \cdot 12,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1024,8 \text{ N} \quad (20.26)$$

Forskjellen mellom c) og d) er kun et fortegn. Personen vil føle seg lettere, og snordraget vil bli mindre.

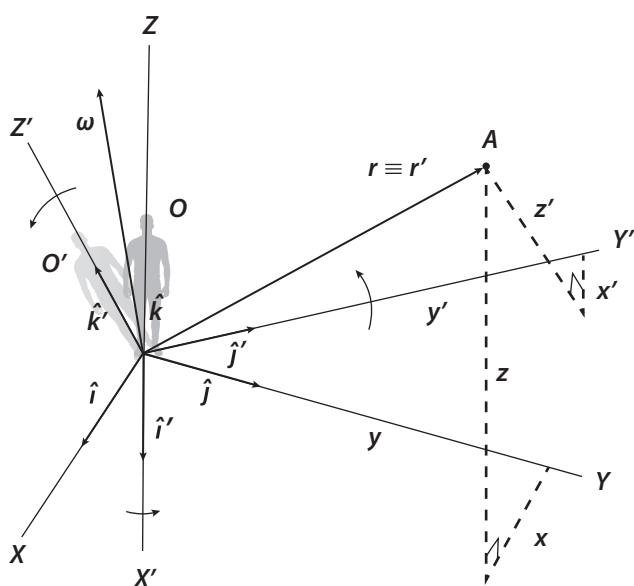
$$S' = m_{\text{lodd}} \left( g - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1 \text{ kg} \cdot 6,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6,81 \text{ N} \quad (20.27)$$

$$N_{\text{person}} = m_{\text{person}} \left( g - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 80 \text{ kg} \cdot 6,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 544,8 \text{ N} \quad (20.28)$$

I fritt fall e) vil heisen ha en akselerasjon nedover lik tyngdens, snordraget forsvinner, og personen vil føle seg vektløs:

$$S' = m_{\text{lodd}}(g - g) = 0 \quad (20.29)$$

$$N_{\text{person}} = m_{\text{person}}(g - g) = 0 \quad (20.30)$$



Figur 20.4 Roterende referansesystemer

Her vil personen i heisen få glede av å oppleve ekvivalensprinsippet i den korte stunden det frie fallet varer. Det er for personen umulig å si om det som oppleves er at kroppen er i et tyngdefelt eller i et akselerert referansesystem.

Vi har sett på ulike ting som har rotet. Hva ville observatører i roterende referansesystemer oppleve? La oss sette opp en transformasjon mellom to systemer som har felles origo og roterer i forhold til hverandre. Se Figur 20.4.

Observatør  $O$  ser en rotasjon med vinkelhastighet  $\vec{\omega}$ , mens  $O'$  ser det motsatte  $-\vec{\omega}$ . Posisjonsvektoren til partikkel  $A$  referert til  $XYZ$  er:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (20.31)$$

Hastigheten til  $A$  målt av  $O$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (20.32)$$

Referert til  $X'Y'Z'$  og observatør  $O'$ :

$$\vec{r} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \quad (20.33)$$

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' \quad (20.34)$$

Observatør  $O$  kan med rette si at også  $\hat{i}', \hat{j}'$  og  $\hat{k}'$  fra hans synspunkt roterer og dermed varierer med tiden.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} \quad (20.35)$$

Siden  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  (8.3), vil en for enhetsvektorene ha:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}' \quad (20.36)$$

Videre får en:

$$x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (20.37)$$

Settes (20.37) inn i (20.35), får en:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (20.38)$$

Dette er altså sammenhengen mellom hastigheten til partikkel  $A$  målt av henholdsvis observatør  $O$  og observatør  $O'$ . Så gjenstår det å finne akselerasjonene.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (20.39)$$

La oss starte med det første leddet, på samme vis som i (20.36):

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{dv'_x}{dt}\hat{i}' + \frac{dv'_y}{dt}\hat{j}' + \frac{dv'_z}{dt}\hat{k}' + v'_x\frac{d\hat{i}'}{dt} + v'_y\frac{d\hat{j}'}{dt} + v'_z\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (20.40)$$

Fra siste ledd har en:

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (20.41)$$

Sammenhengen mellom akselerasjonene kan da skrives:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (20.42)$$

La oss multiplisere med en masse  $m$  slik at vi kan sammenligne krefter i de to koordinatsystemene:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{a}' + m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (20.43)$$

$$\vec{F} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{a}' \quad (20.44)$$

Observatøren i det roterende koordinatsystemet vil altså oppleve fiktive krefter i sitt univers som skyldes rotasjonen alene. De ulike fiktive kreftene er delt opp i:

Sentrifugalakselerasjonen som virker utover:

$$\vec{F}_{\text{sentrifugal}} = m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (20.45)$$

Corioliskraften som virker innover:

$$\vec{F}_{\text{coriolis}} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (20.46)$$

En ser at corioliskraften er avhengig av at det som observeres i det roterende systemet har hastighet relativt til det roterende systemet, i motsetning til sentrifugalkraften som kun er avhengig av rotasjonen. Vi så på slutten i kapittel 9 «**Vel bevart**» Foucaultpendelen som demonstrerte corioliseffekten og dermed beviste at vi var del av et roterende koordinatsystem.

Og til slutt eulerkraften som virker tangentielt dersom det roterende systemet har hastighetsvariasjoner:

$$\vec{F}_{\text{euler}} = m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (20.47)$$



**Figur 20.5** Karusell fra barndommens rike

Har du noen gang prøvd deg på en karusell? Sikkert et fullstendig unødvendig spørsmål, da det er en favoritt blant alle barn og voksne med. Jeg har nettopp hatt et gjensyn med en karusell fra mine barns oppvekst. Jeg hadde lyst å prøve å kjenne på alle de fiktive kreftene som kan oppstå. Som du ser av Figur 20.5, er det ikke bare barna som har vokst opp, og karusellen hadde til alt overmål rustet fast.

Det som var lettest å kjenne, var sentrifugalkraften som prøvde å slynge oss utover. Det som egentlig skjedde, var at vi hang med karusellen rundt, og at våre kroppes treghet var lite villig til å være med på den ferden. Eulerkraften merket vi godt når vi sparket karusellen i gang eller bråstoppet. Det

som var vanskelig å mestre, var å gå på platen. Da lekte vi både med sentrifugalkraften og corioliskraften.

La oss se på noen eksempler. Det første handler om en kule som er på et jevnt roterende, friksjonsløst underlag. I Figur 20.6 ser du platespilleren min under eksperimentet.



**Figur 20.6** Platespiller med kule på

Kulen vil være i ro sett fra en observatør i et inertialsystem med samme origo som det roterende koordinatsystemet, mens den tilsynelatende vil rotere jevnt for observatøren i det roterende systemet. Tar vi utgangspunkt i (20.44), kan vi skrive:

$$-2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{a}' \quad (20.48)$$

Som kan omformes til:

$$2m\omega v' - m\omega^2 r = ma' \quad (20.49)$$

I det roterende systemet er  $v'$  for kulen:

$$v' = -\omega r \quad (20.50)$$

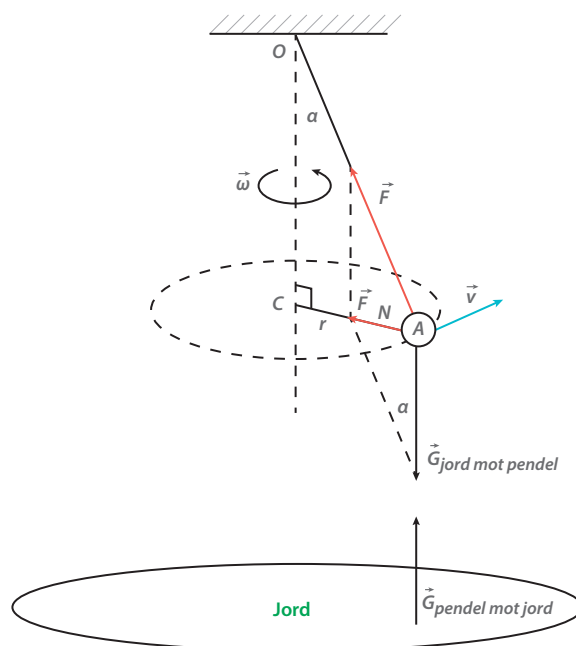
Dette fordi avstanden til origo for kulen er den samme hele tiden. Vi kan derfor skrive:

$$2m\omega^2 r - m\omega^2 r = m\frac{v'^2}{r} = m\vec{a}' \quad (20.51)$$

Observatøren i det roterende koordinatsystemet ser derfor at kulen roterer mot det roterende systemet med en sentripetalkraft produsert av de to fiktive kreftene corioliskraften og sentrifugalkraften. Dersom det er friksjon mellom kule og underlag, vil

corioliskraften bli mindre, første ledd i ligning (20.49), fordi  $v'$  blir mindre, og dermed vil sentrifugalkraften bli dominerende og kulen vil fyke utover.

Det neste eksempelet tar oss tilbake til den koniske pendelen vi så på i kapittel 8. Figur 20.7 viser den.



**Figur 20.7** Konisk pendel

La oss nå innføre et koordinatsystem som roterer med massen A med vinkelhastighet  $\vec{\omega}$  i planet utspent av  $\vec{r}$  og  $\vec{v}$ . I det roterende koordinatsystemet vil A tilsynelatende stå i ro. Med utgangspunkt i (20.37):

$$\vec{F}_N - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0 \quad (20.52)$$

Som vi ser, er det tilsynelatende ingen krefter som virker på A i det roterende systemet, og snordraget  $F_N$  vil kompenseres med en fiktiv sentrifugalkraft:

$$F_N - m\omega^2 r = 0 \quad (20.53)$$



# 21

## Kapittel 21

---

# Løsningsforslag til odde oppgaver

«Store oppgaver skal en begynne på, ikke tenke på.»

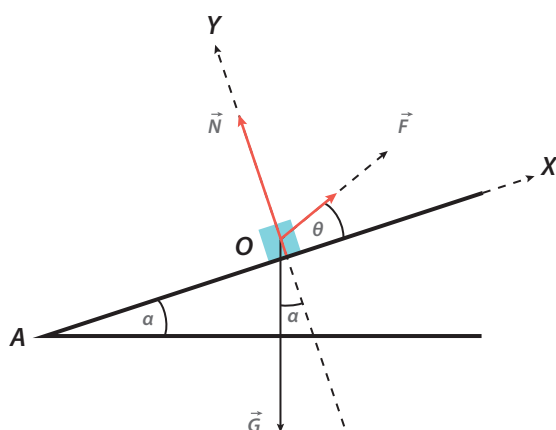
Julius Cæsar (100–44 fvt.)

---

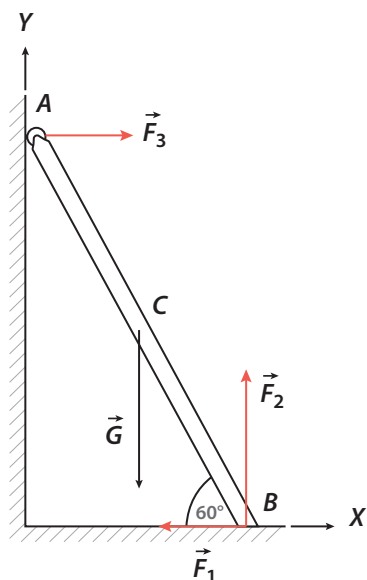
**LÆRINGSUTBYTTE:** Bruke kunnskaper til å løse oppgaver

---

I lærebøker møter man ofte teksten «Svar på odde nummererte oppgaver». Jeg fant det en smule irriterende da jeg studerte fysikk. Hvorfor? Vel, ofte var oppgavene nummerert med partall mye bedre og utfordrende. Så satt en der og lurte på om en hadde forstått den partallsnummererte oppgaven og regnet riktig. Etter at jeg selv begynte å undervise, har jeg fått vite hvorfor. Lærere får tilleggsressurser med blant annet løsningsforslag på partallsoppgavene slik at vi kan briljere overfor fortvilte studenter. Derfor har jeg nå gått til det skritt å bare gi odde nummererte oppgaver, og du skal få svar på dem alle.



Figur 21.1.1 Legeme i ro på et skråplan



Figur 21.3.1 Stige som hviler mot vegg

### Oppgave 1

I Figur 21.1.1 ser du et legeme med tyngde  $\vec{G}$  i ro på et skråplan. Finn et uttrykk for snordraget  $\vec{F}$  og normalkraften  $\vec{N}$  som funksjon av  $\vec{G}$ ,  $\alpha$  og  $\theta$ .

La oss dekomponere kreftene langs skråplanet og normalt på det. Vi har innført et koordinatsystem med x-akse langs skråplanet og y-akse normalt på. Siden vi skal ha likevekt, må:

$$\sum_i F_{ix} = F \cos(\theta) - G \sin(\alpha) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = F \sin(\theta) - G \cos(\alpha) + N = 0$$

Fra første ligning får vi:

$$F = \frac{G \sin(\alpha)}{\cos(\theta)}$$

Fra andre ligning får vi ved å bruke  $F$  fra første ligning:

$$N = G \cos(\alpha) - \frac{G \sin(\alpha) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = G \frac{\cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = G \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos(\theta)}$$

I den siste overgangen har vi brukt setningen om cosinus til summen av to vinkler.

### Oppgave 3

En stige AB som veier 20 kilo hviler mot en vertikal vegg som vist i Figur 21.3.1. Vinkelen mot gulvet er 60 grader. Finn kreftene ved A og B. Stigen har hjul øverst, slik at friksjonen med den vertikale vegg er neglisjerbar.

Her er det bare å ta frem kunnskapen om de to stabilitetskriteriene fra kapitlet «Stabilt som et korthus». Summen av krefter må være null:

$$\sum_i F_{ix} = -F_1 + F_3 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = -G + F_2 = 0$$

La oss kalle lengden på stigen  $L$  og finne kraftmomentet rundt punkt B:

$$\sum \tau_i = G\left(\frac{1}{2}L\cos(60^\circ)\right) - F_3L\sin(60^\circ) = 0$$

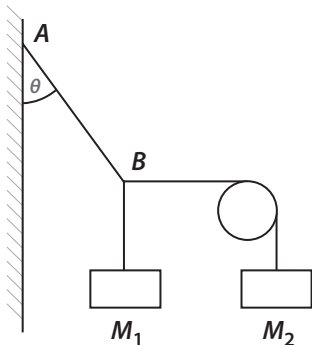
Siste ligning gir et uttrykk for  $F_3$ :

$$F_3 = \frac{G\cos(60^\circ)}{2\sin(60^\circ)} = 56,6 \text{ N}$$

Ved å bruke de to første ligningene finner en:

$$F_1 = F_3 = 56,6 \text{ N}$$

$$F_2 = G = 20 \cdot 9,81 = 196,2 \text{ N}$$



### Oppgave 5

Beregn vinkelen  $\theta$  og snordraget i snoren AB i Figur 21.5.1 dersom  $M_1=30 \text{ kg}$  og  $M_2=40 \text{ kg}$ .

Vi må starte med å beregne tyngden for  $M_1$  og  $M_2$ :

$$G_1 = M_1g$$

$$G_2 = M_2g$$

Figur 21.5.1 To lodd

Summen av kreftene i punkt B må være null:

$$S_{AB}\cos(\theta) = M_1g$$

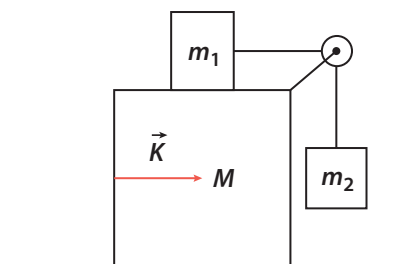
$$S_{AB}\sin(\theta) = M_2g$$

Så deler vi de to ligningene på hverandre:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = 53,1^\circ$$

$$S_{AB} = \frac{M_1g}{\cos(53,1^\circ)} = 490,4 \text{ N}$$

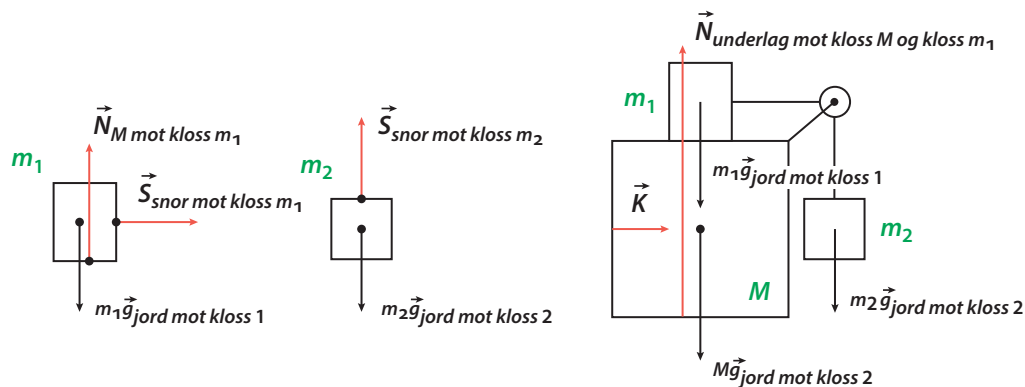


Figur 21.7.1 Snordrag i akselerasjon

**Oppgave 7**

Vi lar en kraft  $\vec{K}$  virke på klossen M mot høyre i horisontal retning. Se Figur 21.7.1. Hvor stor må kraften  $\vec{K}$  være i startøyeblikket for at klossene  $m_1$  og  $m_2$  skal bli i ro relativt til den store klossen M? Vi antar at det ikke er friksjon mellom  $m_1$  og den store klossen M og heller ikke mellom M og underlaget. Trinsen og snoren er masseløse.

Vi starter med å tegne frilegemediagrammer for de to klossene og hele systemet i Figur 21.7.2.



Figur 21.7.2 Frilegemediagrammer

Newtons andre lov for hele systemet:

$$K = (M + m_1 + m_2)a_{system}$$

Siden trinsen er masseløs, blir snordraget  $S$  det samme overalt. For klossene  $m_1$  og  $m_2$  gir Newtons andre lov:

$$S = m_1 a_1$$

$$S - m_2 g = m_2 a_2$$

Forutsetningen i oppgaven gir  $a_2 = 0$  og  $a_1 = a_{system}$  siden klossene  $m_1$  og  $m_2$  skal være i ro relativt til M.

$$S = m_2 g$$

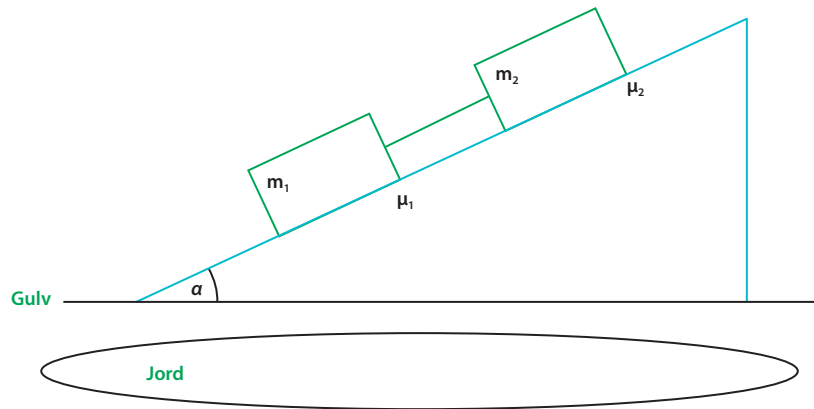
$$a_{system} = a_1 = \frac{S}{m_1} = \frac{m_2 g}{m_1}$$

Dermed er det mulig å finne størrelsen på kraften  $K$ :

$$K = (M + m_1 + m_2) \frac{m_2 g}{m_1}$$

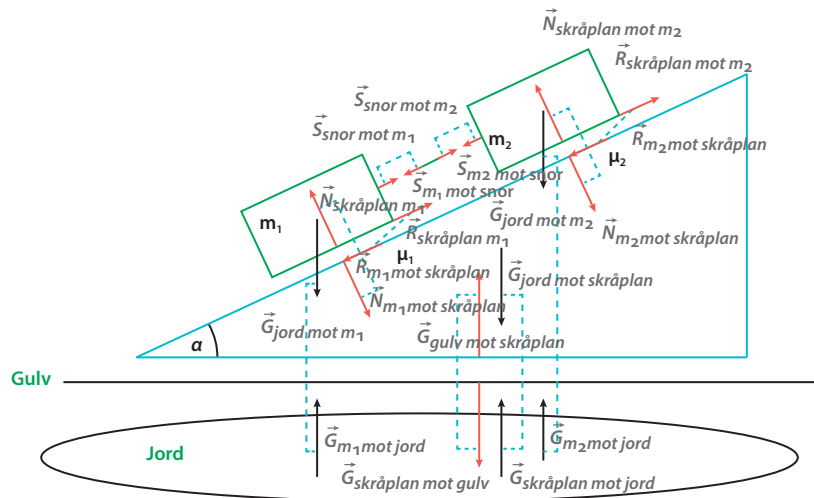
**Oppgave 9**

To klosser som er forbundet med en masseløs snor, sklir nedover et skråplan med helningsvinkel  $\alpha$ . Se Figur 21.9.1. Begge klossene har samme masse  $m_1 = m_2 = m$ , men de glidende friksjonskoeffisientene er forskjellige.  $\mu_2 > \mu_1$ . Klossene sklir derfor nedover mens snoren mellom dem forblir stram. Finn uttrykk for akselerasjon, snordrag og vinkelen skråplanet må ha for at klossene skal skli med konstant fart. Positiv retning er definert nedover langs skråplanet.



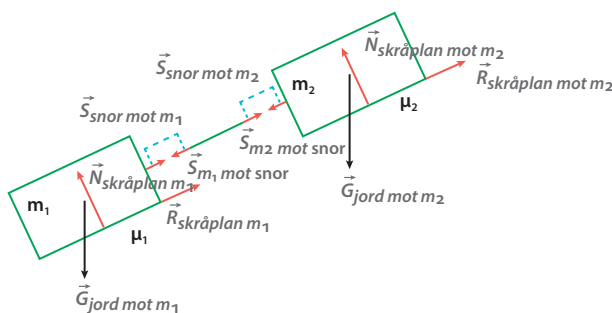
**Figur 21.9.1** To klosser på et skråplan

Vi er ikke bedt om å gjøre det, men la oss tegne inn alle krefter som virker, og pare dem i henhold til Newtons tredje lov. I Figur 21.9.2 ser du resultatet.



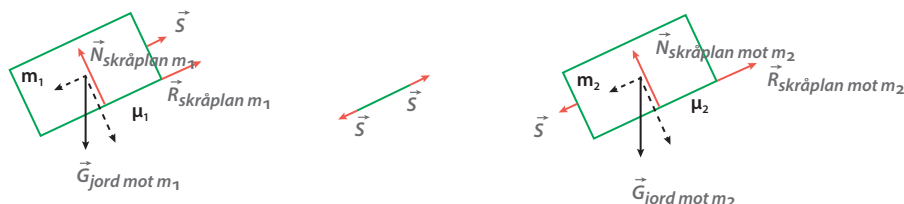
**Figur 21.9.2** Newtons tredje lov i aksjon

Alle krefter har en motkraft som er på ulike objekter. Så fjerner vi omgivelsene, se Figur 21.9.3, fra systemet vi skal se på.



Figur 21.9.3 Vårt system med krefter inntegnet

Siden snoren er masseløs, vil snordraget være det samme overalt i snoren, og vi kan dermed tegne frilegemediagrammer for vårt system som vist i Figur 21.9.4. Der har vi også dekomponert tyngden langs skråplanet og normalt på det.



Figur 21.9.4 Frilegemediagrammer

Da har vi det vi trenger for å begynne å regne. Ved å bruke Newtons andre lov på  $m_1$  finner vi:

$$G_{jord\ mot\ m_1} \sin(\alpha) - R_{skråplan\ mot\ m_1} - S = m_1 a$$

$$G_{jord\ mot\ m_1} \sin(\alpha) - \mu_1 N_{skråplan\ mot\ m_1} - S = m_1 a$$

$$1) m_1 g \sin(\alpha) - \mu_1 m_1 g \cos(\alpha) - S = m_1 a$$

Da har vi en ligning med to ukjente, nemlig akselerasjonen  $a$  og snordraget  $S$ . For å komme videre må vi gjøre samme øvelse på kloss  $m_2$ . Siden snoren mellom klossene forblir stram, må de ha samme akselerasjon  $a$ . Frem med Newtons andre lov igjen:

$$G_{jord\ mot\ m_2} \sin(\alpha) - R_{skråplan\ mot\ m_2} - S = m_2 a$$

$$G_{\text{jord mot } m_2} \sin(\alpha) - \mu_2 N_{\text{skråplan mot } m_2} - S = m_2 a$$

$$2) m_2 g \sin(\alpha) - \mu_2 m_2 g \cos(\alpha) - S = m_2 a$$

Vi finner først akselerasjonen ved å løse 2) med hensyn på  $S$  og så sette inn 1):

$$m_1 g \sin(\alpha) - \mu_1 m_1 g \cos(\alpha) - S = m_1 a$$

$$m_1 g \sin(\alpha) - \mu_1 m_1 g \cos(\alpha) + m_2 g \sin(\alpha) - \mu_2 m_2 g \cos(\alpha) - m_2 a = m_1 a$$

Siden vi er så heldige at  $m_1 = m_2 = m$ , forsvinner massene ut av ligningen, og vi får:

$$a = g \left( \sin(\alpha) - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \cos(\alpha) \right)$$

Snordraget finner vi ved innsetting:

$$m_1 g \sin(\alpha) - \mu_1 m_1 g \cos(\alpha) - S = m_1 a$$

$$S = m g \sin(\alpha) - m \mu_1 g \cos(\alpha) - m a$$

$$S = \frac{1}{2} m g (\mu_1 - \mu_2) \cos(\alpha)$$

Så blir vi bedt om å finne helningsvinkelen til skråplanet for å få klossene til å holde konstant fart. Da må akselerasjonen være null, og vi kan sette:

$$0 = g \left( \sin(\alpha) - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \cos(\alpha) \right)$$

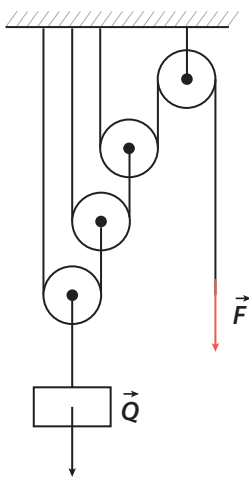
$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \cos(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$$

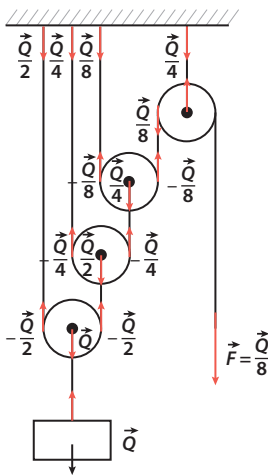
$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \right)$$

### Oppgave 11

Finn kraften  $\vec{F}$  uttrykt i tyngden  $\vec{Q}$  som trengs for å beholde disse masseløse trinsene i likevekt. Se Figur 21.11.1.



Figur 21.11.1 Talje



Figur 21.11.2 Talje med snordrag inntegnet

Her er det bare å tegne inn snordrag. Se Figur 21.11.2. Vi ser at tyngden halveres for hver trinse i taljen, med unntak av den første til høyre, og kraften blir  $\vec{F} = \frac{1}{8} \vec{Q}$ . Vi ser at kreftene som virker på taket er lik kreftene det dras nedover med  $\frac{9}{8} \vec{Q}$ . Taljen

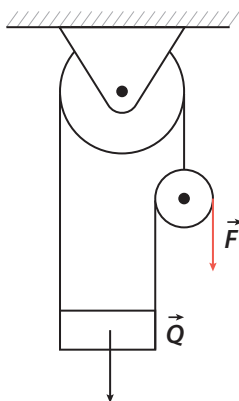
har en utveksling 8:1. Drar vi tauet 1 meter, vil trinse nummer to fra høyre løftes en halv meter, den neste en kvart meter og den siste en åttendels meter. Prisen vi må betale for å få det lettere å dra er at vi må dra lenger. Det totale arbeidet  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$  med å løfte tyngden  $\vec{Q}$  er jo det samme om vi bruker talje eller løfter direkte.

**Oppgave 13**

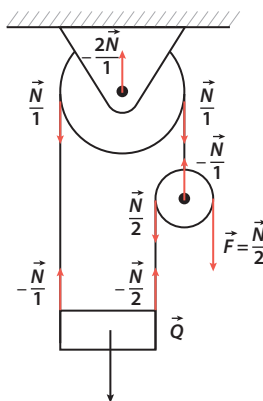
Finn kraften  $\vec{F}$  uttrykt i tyngden  $\vec{Q}$  som trengs for å beholde likevekt. Se Figur 21.13.1.

Den var litt verre. En måte å gjøre det på er å starte fra høyre med en ukjent kraft  $\vec{N}$  og se hvordan den fordeler seg utover, og så relatere den til  $\vec{Q}$ . I Figur 21.13.2 er prosedyren vist.

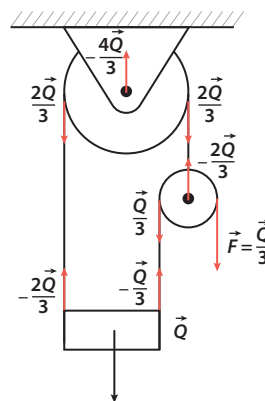
Sammenhengen mellom  $\vec{Q}$  og  $\vec{N}$  blir  $\vec{Q} = \frac{3}{2}\vec{N}$ . Setter vi inn det, kan figuren tegnes på nytt – Figur 21.13.3.



**Figur 21.13.1** Talje



**Figur 21.13.2** Fordeling av ukjent kraft  $\vec{N}$



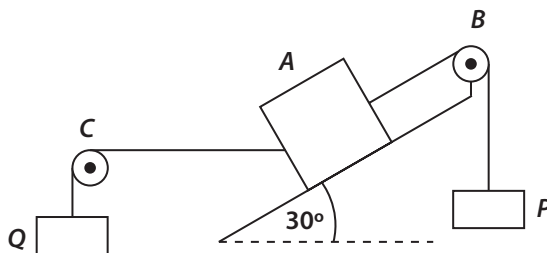
**Figur 21.13.3** Talje med fordeling av krefter

Vi ser igjen at kraften som virker på taket er lik summen av kreftene nedover  $\frac{4}{3}\vec{Q}$ . Taljen har en utveksling 3:1. Drar vi tauet 1 meter, vil det som løftes stige 1 meter minus lengden som trinsen til høyre synker. Siden det er et  $\frac{2}{3}$  forhold på kreftene som virker oppover på det vi skal heve, vil trinsen synke med  $\frac{2}{3}$  meter, og det som løftes vil stige  $\frac{1}{3}$  meter.

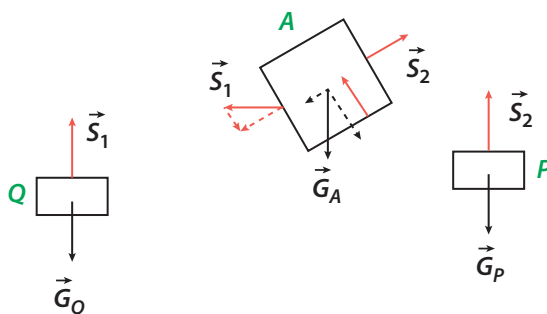
**Oppgave 15**

Beregn vekten til P som trengs for likevekt for systemet vist i Figur 21.15.1, når A er 100 kg og Q er lik 10 kg. Det er ingen friksjon, og trinsene er masseløse. Snoren AC er horisontal og AB parallell med skråplanet. Beregn også normalkraften på A.




**Figur 21.15.1** Systemet som skal beregnes

Vi kunne begynt med Newtons tredje og tegnet inn alle kraftpar som virker, men la oss satse på at vi kan klare oss kun med frilegemediagrammer, Figur 21.15.2, denne gang.


**Figur 21.15.2** Frilegemediagrammer

Da er det bare å finne frem Newtons andre lov og bruke den på de tre legemene:

$$S_1 = G_Q = m_Q g$$

$$S_1 \cos(30^\circ) + G_A \sin(30^\circ) - S_2 = (m_Q + m_A + m_P) a = 0$$

$$S_2 = G_P = m_P g$$

Vi setter så inn ligningene for snordragene i likevektligningen, bruker  $\cos(30^\circ) = \sqrt{2}/2$  og  $\sin(30^\circ) = 1/2$ , og får:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} m_Q g + \frac{1}{2} m_A g - m_P g = 0$$

$$m_P = \frac{\sqrt{3}}{2} m_Q + \frac{1}{2} m_A$$

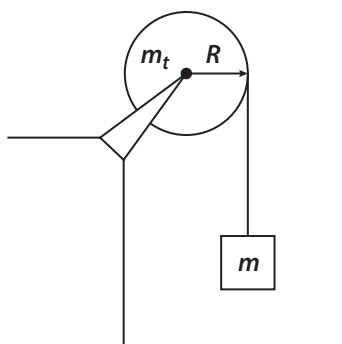
Setter vi inn verdiene for massene, finner vi:

$$m_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \text{ kg} + \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ kg} = 58,7 \text{ kg}$$

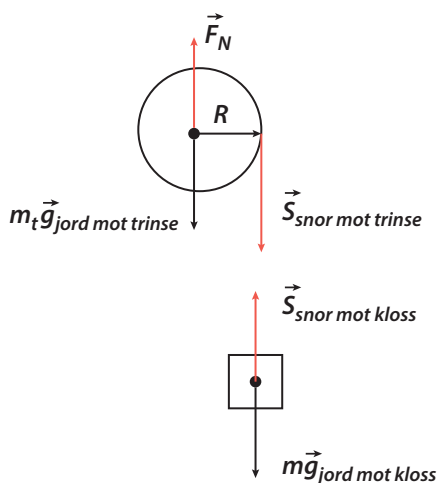
Så var det normalkraften som virker på A. Her må vi huske å ta med bidraget fra  $S_1$ .

$$N_A = -S_1 \sin(30^\circ) + G_A \cos(30^\circ)$$

$$N_A = \left( -\frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 100 \text{ kg} \right) \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 800,5 \text{ N}$$



**Figur 21.17.1** Systemet som skal undersøkes



**Figur 21.17.2** Frilegemediagrammer

### Oppgave 17

En snor er viklet rundt en friksjonsfri trinse som har treghetsmoment  $I$  om aksene og radius  $R$ . I enden av snoren henger en kloss med masse  $m$ . Se Figur 21.17.1. Systemet slippes slik at  $m$  akselererer nedover samtidig som trinsen roterer uten at snoren glipper. Finn akselerasjonen  $a$  til klossen, trinsens vinkelakselerasjon  $\alpha$  og snordraget  $S$ .

Som sedvanlig starter vi med å tegne frilegemediagrammer, Figur 21.17.2.

Så setter vi opp ligningene for trinsens vinkelakselerasjon og bruker Newtons andre lov på klossen. Snordraget er likt mot kloss og trinse.

$$SR = I\alpha$$

$$a = R\alpha$$

$$mg - S = ma$$

Da har vi tre ligninger med tre ukjente  $a$ ,  $\alpha$  og  $S$ . Vi kan for eksempel starte med å finne akselerasjonen  $a$ :

$$a = R\alpha = R \frac{SR}{I} = \frac{(mg - ma)R^2}{I}$$

$$a(I + mR^2) = mgR^2$$

$$a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}$$

Dette svaret ser rimelig ut. Når  $I$  er liten, er klossen i tilnærmet fritt fall, og når  $I$  blir stor, blir akselerasjonen liten.

Så kan vi finne vinkelakselerasjonen  $\alpha$ :

$$a = R\alpha$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{mgR}{I + mR^2}$$

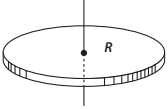
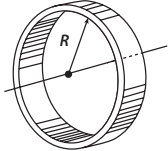
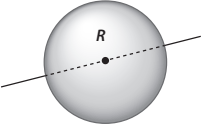
Til slutt finner vi snordraget  $S$ :

$$a = R\alpha = R\frac{SR}{I}$$

$$S = \frac{la}{R^2} = \frac{lmg}{I + mR^2} = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

Igjen et rimelig svar. Når  $I$  blir stor, blir snordraget tilnærmet lik tyngden, og klossen vil være omtrent i ro. Når  $I$  blir liten, blir også snordraget lite, og klossen har tilnærmet fritt fall.

Mens vi er inne på det: Hva om vi brukte noe annet enn en trinse til å rulle ut snoren? For eksempel en massiv kule med et spor for snoren eller en ring med veldig tynne spiler inn til navet. Hvilken ville gitt den raskeste akselerasjonen av trinse, kule eller ring med samme masse  $M$  og radius  $R$ ? Da er det bare å hente treghetsmomentene som du finner du i kapitlet «Definisjoner m.m.» i **Appendiks**:

Tregghetsmoment	
Skive 	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Ring 	$I = MR^2$
Kule 	$I = \frac{2}{5}MR^2$

$$a_{trinse} = \frac{mgR^2}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)} = \frac{mg}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)}$$

$$a_{ring} = \frac{mgR^2}{\left(MR^2 + mR^2\right)} = \frac{mg}{\left(M + m\right)}$$

$$a_{kule} = \frac{mgR^2}{\left(\frac{2}{5}MR^2 + mR^2\right)} = \frac{mg}{\left(\frac{2}{5}M + m\right)}$$

Det er altså kule som gir den største akselerasjonen og ringen den minste. Det er vel som forventet, da kulens masse er nærmere navet enn ringen og dermed er lettere å få til å snurre rundt. Motorer har ofte svinghjul hvor massen er fordelt omtrent slik som for ringen. Svinghjulet fungerer som et lager for rotasjonsenergi og sørger for jevn gange. Det er også verd å merke seg at radien ikke har noen betydning for akselerasjonen.

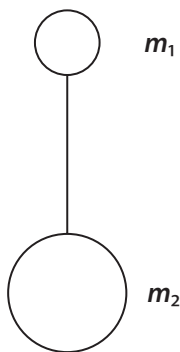
### Oppgave 19

Vi følger i Galileo Galileis fotspor oppover i det skjeve tårn i Pisa. I hendene har vi to blykuler  $m_1$  og  $m_2$  med forskjellig masse. De er forbundet med en masseløs snor. Vi skal teste Aristoteles' teori om at tunge ting faller raskere enn lette. Aristoteles mente altså at tyngdens akselerasjon var proporsjonal med massen:

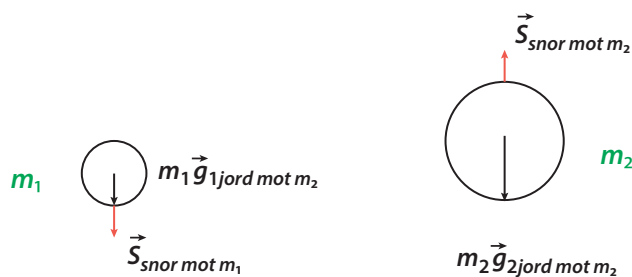
$$m = kg$$

Vi kaster ut blykulene fra 50 meters høyde i tårnet. Figur 21.19.1 viser kulene mens de faller. Siden  $m_1$  er lettere enn  $m_2$ , vil snoren strammes. Hvor stor blir akselerasjonen uttrykt i massene og tyngdens akselerasjon på den tyngste kule og hva blir snordraget dersom vi regner med aristotelisk fysikk? Hva er underlig med resultatet vi kommer frem til?

Vi starter med å tegne frilegemediagrammer, Figur 21.19.2, som viser kreftene som virker:



**Figur 21.19.1** Kuler i fritt fall fra det skjeve tårn i Pisa



**Figur 21.19.2** Frilegemediagrammer

Da snoren ansees å være masseløs, er snordraget det samme overalt. Da ser vi på kreftene som virker på de to legemene, og skriver med litt anakronistisk hjelp av Newtons andre lov:

$$m_2 g_2 - S = m_2 a$$

$$m_1 g_1 + S = m_1 a$$

Siden massene er proporsjonale med tyngdens akselerasjon på dem, kan vi finne et uttrykk for  $g_1$  som funksjon av massene og  $g_2$ :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{k g_2}{k g_1}$$

$$g_1 = \frac{m_1}{m_2} g_2$$

La oss finne akselerasjonen først ved å addere de to utgangsligningene:

$$\begin{aligned} m_2 g_2 + m_1 g_1 &= m_2 a + m_1 a \\ a &= \frac{m_2 g_2 + m_1 g_1}{m_2 + m_1} = \frac{m_2 g_2 + m_1 \frac{m_1}{m_2} g_2}{m_2 + m_1} = \frac{\left(m_2 + m_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right)}{m_2 + m_1} g_2 \end{aligned}$$

Siden  $\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$  er mindre enn 1 siden  $m_1 < m_2$ , vil  $a$  alltid være mindre enn  $g_2$ . Det er et besynderlig resultat fordi det sammensatte systemet  $m_1$  og  $m_2$  har større masse enn  $m_2$  og derfor burde falle med større akselerasjon. Aristoteles tok feil. Den eneste måten å løse denne floken på er å sette  $g_2 = g_1 = g$ , og da blir akselerasjonen for det sammensatte systemet:

$$a = \frac{m_2 g_2 + m_1 g_1}{m_2 + m_1} = \frac{m_2 g + m_1 g}{m_2 + m_1} = g$$

Snordraget i Aristoteles' verden blir:

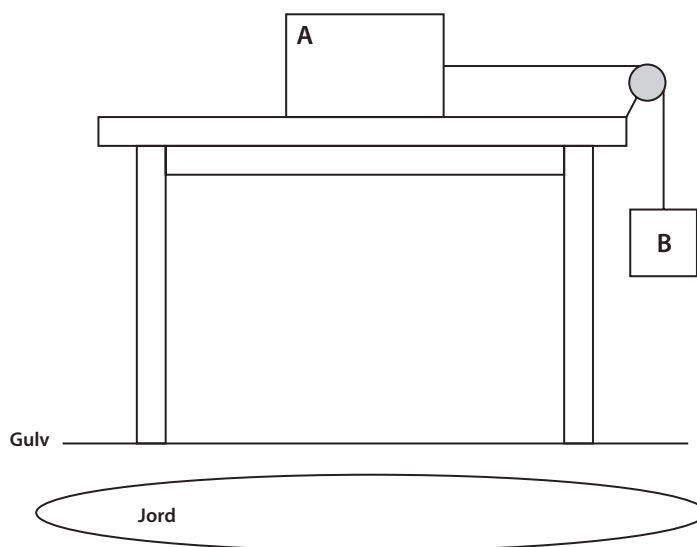
$$S = m_2 g_2 - m_2 a = \left(\frac{m_2 m_1 - m_2 m_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)}{m_2 + m_1}\right) g_2$$

Dersom vi forlater Aristoteles' verden og setter  $g_2 = g_1 = g$ , finner vi at snordraget er null som seg hør og bør:

$$S = m_2 g_2 - m_2 a = \left(\frac{m_2 m_1 - m_2 m_1 \left(\frac{g_1}{g_2}\right)}{m_2 + m_1}\right) g_2 = \left(\frac{m_2 m_1 - m_2 m_1}{m_2 + m_1}\right) g = 0$$

**Oppgave 21**

Systemet i Figur 21.21.1 viser to klosser som er koblet sammen med en snor som ligger over en trinse. Friksjonskraften mellom snor og trinse er stor nok til at snoren ikke glir over trinsen, men at det er trinsen som går rundt. Vi lar systemet starte fra ro og ønsker å beregne akselerasjonen til klossene.



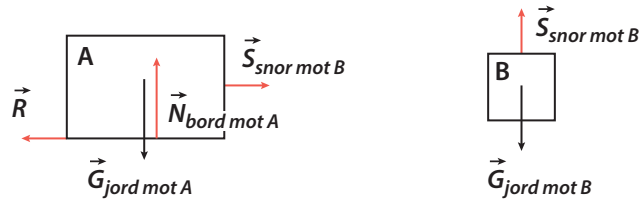
**Figur 21.21.1** Systemet

Følgende data er gitt:

Masse, klosse A på bord	1,0 kg
Masse, hengende kloss B	1,0 kg
Masse, trinse	50 gram
Radius, trinse	10 cm
Tregghetsmoment trinse	$2,5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Masse, snor	2 gram
Friksjonskoeffisient kloss/bord	0,2

- Finn akselerasjonen dersom vi ignorerer massen til trinse og snor
- Er det rimelig å ignorere massen til snor og trinse? Omtrent hvor stor feil gir det at vi ignorerte disse massene i a)? Gjør feilen svaret vårt i a) for stort eller for lite?
- Har vi ignorert andre effekter som potensielt kan ha betydning?
- Hvilke av effektene vi har ignorert gir størst bidrag til feilen i beregningen vår i a)?

Vi starter med å tegne frilegemediagrammer, Figur 21.21.2, for klossene:



**Figur 21.21.2** Frilegemediagrammer for klossene A og B

Normalkraften fra bordet på kloss A og tyngdens kraft på kloss A er like store og motsatt rettet og «nuller» hverandre derfor ut. Snordraget er det samme overalt da vi antar at snoren er masseløs. Vi finner frem Newtons andre lov og skriver:

$$S - R = m_A a$$

$$G_{jord\ mot\ B} - S = m_B g - S = m_B a$$

Adderer vi disse to ligningene, finner vi et uttrykk for akselerasjonen  $a$ :

$$m_B g - R = (m_A + m_B) a$$

$$m_B g - \mu N_{bord\ mot\ A} = (m_A + m_B) a$$

$$m_B g - \mu m_A g = (m_A + m_B) a$$

$$a = \frac{(m_B - \mu m_A)}{(m_A + m_B)} g$$

Siden  $m_A = m_B = m$  kan dette forenkles til:

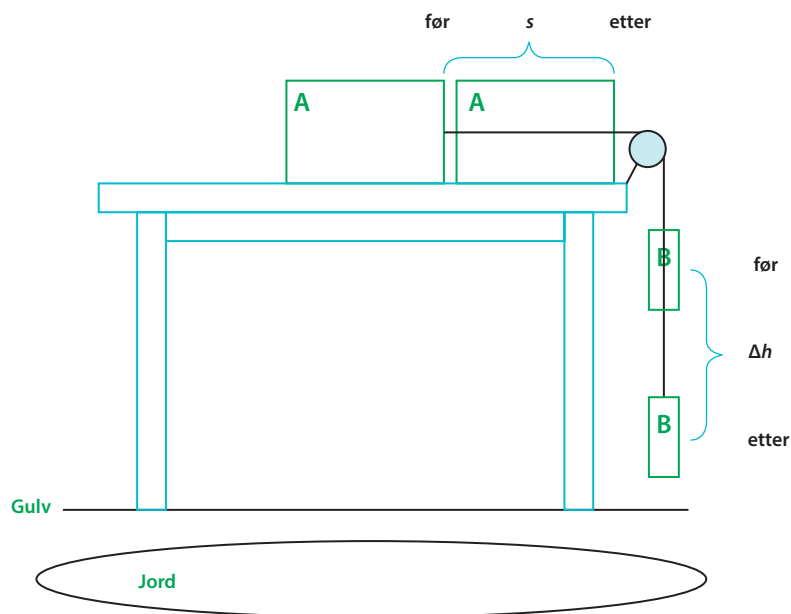
$$a = \frac{(1 - \mu)}{2} g = \frac{(1 - 0,2)}{2} g = 0,4 \cdot g = 0,4 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 3,924 \text{ m/s}^2$$

Da er vi ferdige med a) og klare for b) hvor vi blir spurt om det er rimelig at vi kan ignorere snoren, og om feilen vår gjør akselerasjonen vi har regnet ut i a) for liten eller for stor. La oss se på snoren først. Vi kan beregne ytterpunktene i akselerasjonen snorens masse gir ved først å sette snorens masse på kloss A som gir mer å dra på og dermed mindre akselerasjon, og etterpå på kloss B som vil gi mer akselerasjon.

$$a_{min} = \frac{(m_B - \mu(m_A + m_s))}{(m_A + m_B) + m_s} g = \frac{(1 - \mu(1 + 0,002))}{2,002} g = 3,918 \text{ m/s}^2$$

$$a_{maks} = \frac{(m_B + m_s - \mu m_A)}{(m_A + m_B) + m_s} g = \frac{(1 + 0,002 - 0,2)}{2,002} g = 3,930 \text{ m/s}^2$$

Vi ser at disse ytterpunktene ikke er langt unna det vi hadde med masseløs snor. En forskjell på kun  $0,006 \text{ m/s}^2$ . Så må vi sammenligne effekten av en trinse med masse og snor med masse. Det kan gjøres med energibetraktninger. Figur 21.21.3 viser «før» og «etter» for vårt system:



**Figur 21.21.3** Vårt system «før» og «etter»

Når vi slipper systemet, har det ingen fart, og «etter» har alle delene av systemet en fart  $v$ . Vi kan sette opp energiligningen.

$$m_B g \Delta h + m_{snor} g x \frac{1}{2} \Delta h - \mu m_A g \Delta h = \frac{1}{2} \left( \frac{I}{R^2} + m_A + m_B + m_{snor} \right) v^2$$

Vi har satt  $x$ , som kan ha en verdi mellom 0 og 1, multiplisert med  $\frac{1}{2} \Delta h$ , massesenteret for snorens plassering, for snoren da vi ikke vet hvor mye av den som er utenfor bordet ved  $\Delta h$ . Vi løser med hensyn på farten

$$v = \sqrt{2 \left( \frac{(m_B - \mu m_A + \frac{1}{2} m_{snor} x)}{(\frac{I}{R^2} + m_A + m_B + m_{snor})} g \right) \Delta h}$$

Denne formelen kjenner vi igjen fra Galilei i kapitlet «**Historisk sett**», så det er bare å plukke ut akselerasjonen:

$$a = \left( \frac{(m_B - \mu m_A + \frac{1}{2} m_{snor} x)}{(\frac{I}{R^2} + m_A + m_B + m_{snor})} g \right)$$



Vi kan sette inn verdier:

$$a = \left( \frac{(1 - 0,2 + 0,001x)}{(0,0025 + 1 + 1 + 0,001)} g \right)$$

Vi ser at trinsens bidrag til å minske akselerasjonen er 25 ganger så stort som bidraget fra snoren. Til å begynne med vil bidraget fra snoren minske akselerasjonen, og på slutten vil den være med å øke den, men det drukner fullstendig i bidraget fra trinsen. Vi kan sette opp en tabell med akselerasjonene:

Akselerasjon	Størrelse	Avvik fra $a$ med masseløs trinse og snor
$a$	$3,924 \text{ m/s}^2$	$0 \text{ m/s}^2$
$a_{\text{minsnor}} \ x = 0$	$3,922 \text{ m/s}^2$	$-0,002 \text{ m/s}^2$
$a_{\text{maks snor}} \ x = 1$	$3,927 \text{ m/s}^2$	$0,003 \text{ m/s}^2$
$a_{\text{trinse med masse}}$	$3,876 \text{ m/s}^2$	$-0,048 \text{ m/s}^2$

Vi har jo tidligere regnet med en trinse som har masse (8.27), så vi kan jo sjekke overslaget vi har gjort.

$$a_{\text{trinse med masse}} = \frac{(m_B - \mu m_A)}{\left(m_A + m_B + \frac{1}{2}m_T\right)} g = \frac{(m_B - \mu m_A)}{\left(m_A + m_B + \frac{I}{R^2}\right)} g = \frac{(1 - \mu)}{\left(2 + \frac{2,5 \times 10^{-4}}{0,1^2}\right)} g = 3,876 \text{ m/s}^2$$

Det ble likt. Det er ganske enkelt å beregne hvor mye en trinse med masse har å si for systemet. Det er mye verre å beregne snorens bidrag eksakt. For å summere opp b). Ja, det er rimelig å ignorere massen til snor og trinse. Feilen blir i størrelse:

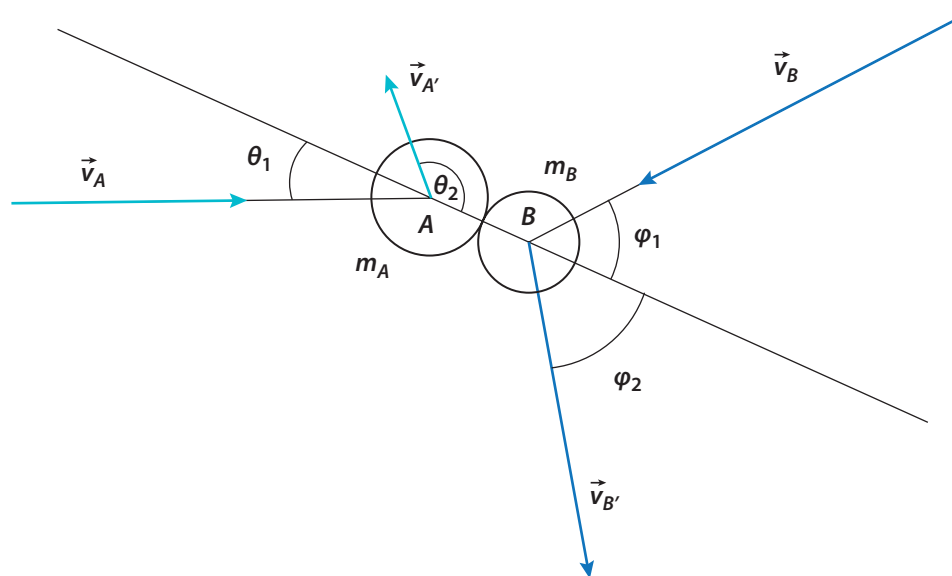
$$1 - \frac{3,876 \text{ m/s}^2}{3,924 \text{ m/s}^2} = 1,22 \%$$

Feilen vår gjør svaret i a) for stort. Det koster krefter å sette trinsen med masse i akselerasjon, og den totale akselerasjonen blir derfor mindre.

Så var det c). Har vi ignorert andre effekter? Vel, en kunne jo tenke seg friksjon i akslingen som ytterligere ville senket akselerasjonen. Luftmotstand må vel i denne situasjonen ansees som neglisjerbar. Når jeg tenker meg om, så blir det i denne typen oppgaver aldri nevnt andre effekter enn de vi allerede har undersøkt, og det er jo et svar i seg selv. Vi har jo allerede studert d). Det er antagelsen om masseløs trinse som gir størst bidrag til feil i beregningen.

## Oppgave 23

To elastiske kuler A og B støter sammen i et skjevt støt som vist i Figur 21.23.1. Kule A har en masse på 0,8 kg, og hastighetsvektoren  $\vec{v}_A$  før støtet har en skalarverdi lik 5,2 m/s og danner en vinkel på  $\theta_1 = 25^\circ$  med linjen som går gjennom kulenes massesentre. Kule B har masse 0,5 kg og danner en vinkel på  $\varphi_1 = 45^\circ$  med linjen som går gjennom kulenes massesentre. Regn ut skalarverdi og kulenes hastighetsvektor etter støtet.



Figur 21.23.1 Skjevt støt

Her må vi først og fremst overbevise oss selv, og andre, om at det kun blir fartsendring langs linjen som går mellom massesentrene. Denne linjen kalles for støtnormalen. Normalt på støtnormalen vil det ikke være noen hastighetsendring. Det er derfor fornuftig å dekomponere hastigheten langs og normalt på støtnormalen som vist i Figur 21.23.2.

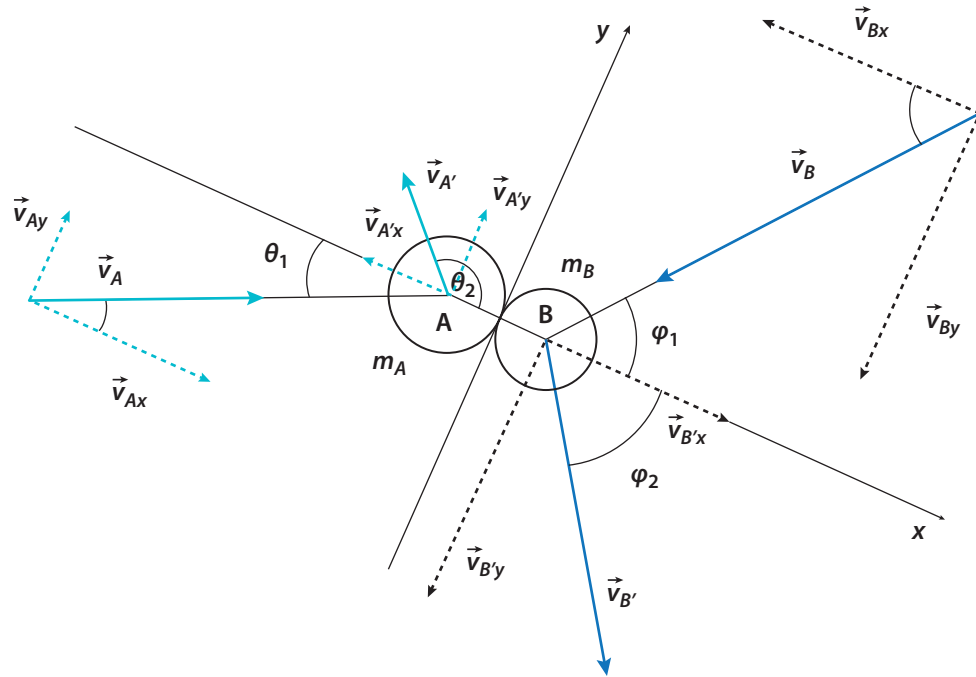
La oss regne ut den dekomponerte farten for de to kulene før støtet:

$$|\vec{v}_{Ax}| = |\vec{v}_A| \cos(\theta_1) = 5,2 \cdot \cos(25^\circ) \text{ m/s} = 4,71 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{Ay}| = |\vec{v}_A| \sin(\theta_1) = 5,2 \cdot \sin(25^\circ) \text{ m/s} = 2,20 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{Bx}| = |\vec{v}_B| \cos(\varphi_1) = -9,0 \cdot \cos(45^\circ) \text{ m/s} = -6,36 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{By}| = |\vec{v}_B| \sin(\varphi_1) = -9,0 \cdot \sin(45^\circ) \text{ m/s} = -6,36 \text{ m/s}$$



**Figur 21.23.2** Skjevt støt med dekomponerte hastigheter

Fart i y-retning vil være den samme etter støtet:

$$|\vec{v}_{Ay}| = |\vec{v}_{A'y}| = 2,20 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{By}| = |\vec{v}_{B'y}| = -6,36 \text{ m/s}$$

For å finne den endrede fart i x-retning tar vi et lite gjensyn med (9.32) og (9.33):

$$|\vec{v}_{A'x}| = \frac{m_A |\vec{v}_{Ax}| + m_B |\vec{v}_{Bx}| - m_B (|\vec{v}_{Ax}| - |\vec{v}_{Bx}|)}{m_A + m_B}$$

$$|\vec{v}_{B'x}| = \frac{m_A |\vec{v}_{Ax}| + m_B |\vec{v}_{Bx}| + m_A (|\vec{v}_{Ax}| - |\vec{v}_{Bx}|)}{m_A + m_B}$$

$$|\vec{v}_{A'x}| = \frac{0,8 \cdot 4,71 + 0,5 \cdot (-6,36) - 0,5(4,71 + 6,36)}{0,8 + 0,5} \text{ m/s} = -3,80 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{B'x}| = \frac{0,8 \cdot 4,71 + 0,5 \cdot (-6,36) + 0,8(4,71 + 6,36)}{0,8 + 0,5} \text{ m/s} = 7,26 \text{ m/s}$$

Hastigheten til kule A etter støtet:

Skalarverdi (fart) er:

$$|\vec{v}_A| = \sqrt{|\vec{v}_{Ax}|^2 + |\vec{v}_{Ay}|^2} = \sqrt{(-3,80)^2 + (2,20)^2} = 4,39 \text{ m/s}$$

Retningen er gitt ved:

$$\theta_2 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{|\vec{v}_{Ay}|}{|\vec{v}_{Ax}|}\right) = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{3,80}{2,20}\right) = 120,1^\circ$$

Hastigheten til kule B etter støtet:

Skalarverdi (fart) er:

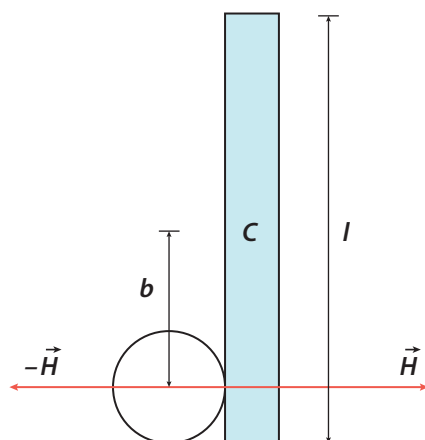
$$|\vec{v}_B| = \sqrt{|\vec{v}_{Bx}|^2 + |\vec{v}_{By}|^2} = \sqrt{(7,26)^2 + (-6,36)^2} = 9,66 \text{ m/s}$$

Retningen er gitt ved:

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{|\vec{v}_{By}|}{|\vec{v}_{Bx}|}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7,26}{6,36}\right) = 48,8^\circ$$

### Oppgave 25

En stav med lengde  $l = 0,40 \text{ m}$  og masse  $m_{\text{stav}} = 1,0 \text{ kg}$  ligger på et friksjonsfritt bord. En sirkelformet skive med masse  $m_{\text{skive}} = 0,5 \text{ kg}$  beveger seg med fart  $v_{\text{skive1}} = 4,0 \text{ m/s}$ . Skiven treffer staven i et punkt  $b = 0,15 \text{ m}$  fra stavens massesenter. Se Figur 21.25.1. Støtet er rett, skiven vil ha samme retning etter støtet, og elastisk. Siden støtet er elastisk, er den mekaniske energien bevart.



**Figur 21.25.1** Ikke sentralt støt mellom skive og stav

1. Hvor stor fart  $v_C$  får stavens massesenter?
2. Hvor stor vinkelhastighet  $\omega$  får staven?
3. Hvor stor fart  $v_{\text{skive2}}$  får skiven etter støtet?

$\vec{H}$  er kraftstøtet (kraft multiplisert med tid  $\vec{H} = \vec{F}t$ ) staven mottar, og  $-\vec{H}$  er kraftstøtet skiven utsettes for. Kraftstøt er endring i bevegelsesmengde, så vi får:

$$-H = m_{\text{skive}} v_{\text{skive2}} - m_{\text{skive}} v_{\text{skive1}}$$

$$H = m_{\text{stav}} v_C$$

Her er  $v_C$  farten til stavens massesenter. Eliminerer vi  $H$ , får vi:

$$m_{skive} v_{skive1} = m_{skive} v_{skive2} + m_{stav} v_C$$

Systemets bevegelsesmengde er bevart. Momentstøtet  $bH$  for staven om dens massesenter C er lik endringen av spinnets om C:

$$bH = I_c \omega$$

Ved å bruke sammenhengen mellom  $H$  og  $v_C$  kan siste ligning skrives som:

$$\omega = \frac{b m_{stav}}{I_c} v_C$$

Hva er så treghetsmomentet for en stav? Det finner du i kapitlet «**Definisjoner m.m.**» i **Appendiks** og er gitt ved:

$$I_C = \frac{m_{stav}}{12} l^2 = \frac{1,0}{12} (0,4)^2 = 0,013 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Den kinetiske energien er bevart i støtet:

$$\frac{1}{2} m_{skive} v_{skive1}^2 = \frac{1}{2} m_{skive} v_{skive2}^2 + \frac{1}{2} m_{stav} v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Vi får dette ligningssettet:

$$m_{skive} v_{skive1} = m_{skive} v_{skive2} + m_{stav} v_C$$

$$\frac{1}{2} m_{skive} v_{skive1}^2 = \frac{1}{2} m_{skive} v_{skive2}^2 + \frac{1}{2} m_{stav} v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

1) Løses det, finner vi farten til stavens massesenter:

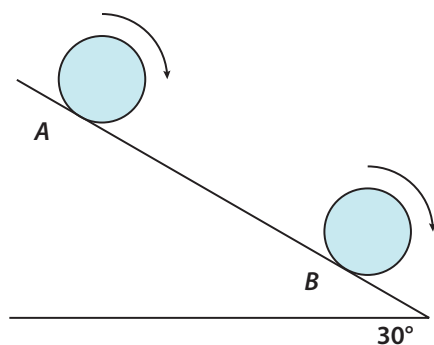
$$v_C = \frac{2 v_{skive1}}{\frac{m_{stav}}{m_{skive}} + \frac{m_{stav} b^2}{I_c} + 1} = \frac{2 \cdot 4,0}{\frac{1,0}{0,5} + \frac{1,0 \cdot (0,15)^2}{0,013} + 1} = 1,71 \text{ m/s}$$

3) Skivens fart etter støtet:

$$v_{skive2} = 4,0 - \frac{1,0}{0,5} \cdot 1,71 = 0,59 \text{ m/s}$$

2) Stavens vinkelhastighet blir:

$$\omega = \frac{b m_{stav}}{I_c} v_C = \frac{12b}{l^2} v_C = \frac{12 \cdot 0,15}{(0,4)^2} \cdot 1,71 = 19,2 \text{ rad/s}$$



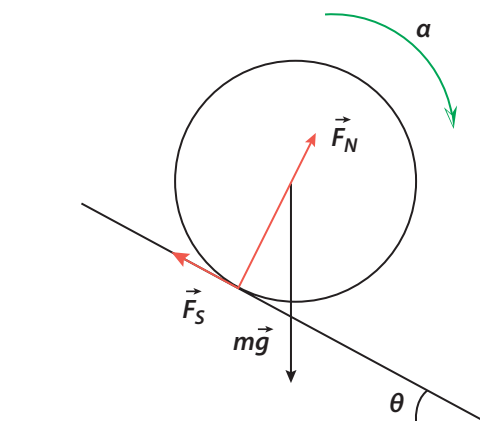
Figur 21.27.1 Hjul som ruller.

## Oppgave 27

Et kompakt, homogent, jevnt tykt hjul med masse  $m = 3,0$  kg og radius 6 cm starter i ro i punktet A og ruller uten å gli 2,4 m nedover på et skråplan til punkt B. Skråplanet har en helningsvinkel på  $30^\circ$ . Se Figur 21.27.1.

- Tegn alle kreftene som virker på hjulet ved punkt A
- Finn treghetsmomentet til hjulet om massesenteret
- Finn akselerasjon til hjulets massesenter
- Finn vinkelakselerasjonen til hjulet.
- Hva må den statiske friksjonskoeffisienten  $\mu_s$  være for å unngå at hjulet glir?
- Finn farten til hjulets massesenter og vinkelhastigheten til hjulet ved punkt B når avstanden mellom A og B er 2,4 m.
- Hva er verdien av spillet til hjulet (om massesenteret) når hjulet er ved punkt B?

Først a) skal vi tegne alle kreftene som virker på hjulet i punkt A. Da må det tegnes et frilegemediagram for hjulet slik som i Figur 21.27.2.



Figur 21.27.2 Frilegemediagram for hjulet.

Så skal vi b) finne treghetsmomentet til hjulet. Det er naturlig å se på hjulet som en skive og bruke det vi fant i kapitlet «33 1/3 rpm» (8.19).

$$I_C = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot (0,06)^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0,0054 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Det neste c) vi skal regne ut, er massesenterets akselerasjon. Da er det bare å ta en titt på frilegemediagrammet vi har tegnet i a) og skrive opp Newtons andre lov for bevegelsen av massesenteret:

$$mg\sin(\theta) - F_s = ma$$

Spinnet om massesenteret gir:

$$rF_s = I_c \alpha$$

Siden vi har ren rulling, må akselerasjonen til massesenteret og hjulets rand være lik i størrelse:

$$a = r\alpha$$

Da blir:

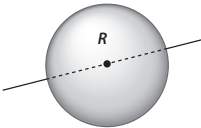
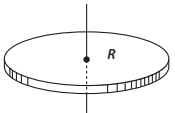
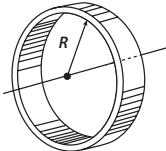
$$F_s = \frac{I_c a}{r^2}$$

$$mg\sin(\theta) - F_s = ma$$

$$mg\sin(\theta) - \frac{I_c a}{r^2} = ma$$

$$a = \frac{g\sin(\theta)}{1 + \frac{I_c}{mr^2}} = \frac{g\sin(\theta)}{1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot (0,06)^2}{3,0 \cdot (0,06)^2}} = \frac{2}{3}g\sin(\theta) \text{ m/s}^2 = 3,27 \text{ m/s}^2$$

Hva om det hadde vært noe annet som rullet? Ville akselerasjonen vært den samme? Vi ser av formelen at jo større  $I_c$ , jo mindre blir akselerasjonen. La oss sammenligne noen kandidater:

Type	Tregghetsmoment	Akselerasjon
Kule 	$I = \frac{2}{5}MR^2$	$a = \frac{5}{7}g\sin(\theta)$
Skive 	$I = \frac{1}{2}MR^2$	$a = \frac{2}{3}g\sin(\theta)$
Ring 	$I = MR^2$	$a = \frac{1}{3}g\sin(\theta)$

Vi ser at kulen ruller raskest og ringen tregest. Det skyldes det faktum at kulen har mer av sin masse nærmere massesenteret enn de andre typene.

d) har vi allerede indirekte svart på ved å kreve at det skal være ren rulling:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{3,27}{0,06} \text{ 1/s}^2 = 54,5 \text{ 1/s}^2$$

I e) spørres det om hva den statiske friksjonskoeffisienten  $\mu_s$  skal være for å unngå at hjulet glir. For å kunne svare på det må vi først finne et uttrykk for den statiske friksjonskraften ved rulling:

$$F_s = \frac{I_c a}{r^2} = \frac{I_c \left( \frac{g \sin(\theta)}{1 + \frac{I_c}{mr^2}} \right)}{r^2} = \frac{mg I_c \sin(\theta)}{I_c + mr^2}$$

Vi ser at  $F_s$  øker med økende vinkel, men det er en øvre grense for  $F_s$ , nemlig:

$$F_s = \mu_s N$$

Derfor må  $F_s$  være mindre eller lik  $\mu_s N$ :

$$\frac{mg I_c \sin(\theta)}{I_c + mr^2} \leq \mu_s mg \cos(\theta)$$

$$\mu_s \geq \frac{I_c \tan(\theta)}{I_c + mr^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}mr^2\right) \tan(\theta)}{\left(\frac{1}{2}mr^2\right) + mr^2} = \frac{1}{3} \tan(\theta) = \frac{1}{3} \tan(30^\circ) = 0,19$$

Den statiske friksjonen  $\mu_s$  må minst være 0,19 for at hjulet skal rulle.

I f) skal vi finne farten til hjulets massesenter og vinkelhastigheten til hjulet ved punkt B når avstanden mellom A og B er 2,4 m (antar rulling).

Farten til massesenteret blir:

$$v_c = \sqrt{2as} = \sqrt{3,27 \text{ m/s}^2 \cdot 2,4 \text{ m}} = 2,80 \text{ m/s}$$

Farten til hjulets rand må være den samme siden vi har rulling, og dermed blir vinkelhastigheten:

$$\omega = \frac{2,80 \text{ m/s}}{0,06 \text{ m}} = 46,70 \text{ 1/s}$$

Det siste vi blir bedt om er å finne verdien av hjulets spinn (om massesenteret) når hjulet er ved punkt B? Spinn er gitt ved:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



I vårt tilfelle vil spinnets øke fra 0 ved punkt A og nå sin maksimalverdi langs AB ved B. Siden hastigheten om massesenteret (langs hjulets rand) står normalt på radien  $r$ , kan vi skrive:

$$L = rp = rmv = 0,06 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ kg} \cdot 2,80 \text{ m/s} = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Er det mulig å hente ut noe mer fysikk av denne oppgaven? Hva med å foreta energibetraktninger? Den kinetiske energien for vårt hjul som ruller nedover skråplanet er gitt ved:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v_c}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_c^2$$

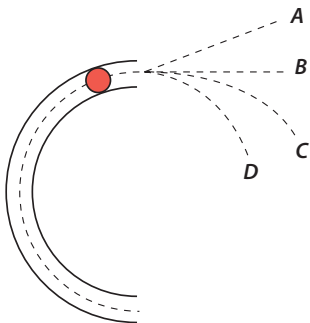
Økning i kinetisk energi er lik reduksjon i potensiell energi minus det arbeid  $W_f$  som friksjonen gjør. En har etter at hjulet har rullet en strekning  $s$  på skråplanet fra å være i ro:

$$\frac{3}{4}mv_c^2 = mgs \sin(\theta) - W_f$$

Hvordan skal vi komme oss videre? La oss derivere med hensyn på tiden for å finne forandringen i arbeidet  $W_f$ .

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}mv_c a &= mg \frac{ds}{dt} \sin(\theta) - \frac{dW_f}{dt} \\ \frac{3}{2}mv_c \left(\frac{2}{3}g \sin(\theta)\right) &= mg v_c \sin(\theta) - \frac{dW_f}{dt} \\ \frac{dW_f}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Det er altså ingen endring i arbeidet, og siden det er null ved startøyeblikket, så utfører ikke rulling noe arbeid. Rullemotstand er ikke friksjon i fysisk betydning, men mest elastiske kortvarige deformasjoner av hjul og underlag i berøringsflatene. Først når hjulet begynner delvis å skli, vil det utføres glidningsarbeid.



Figur 21.29.1 Kule i rør

### Oppgave 29

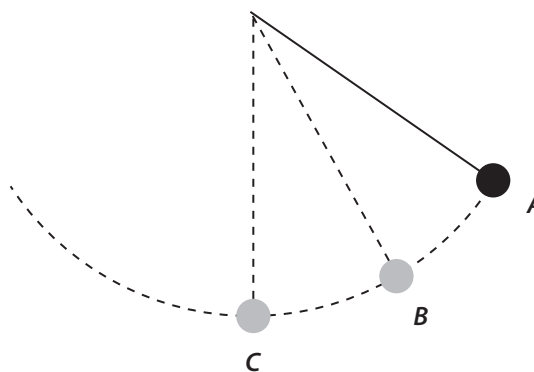
En kule blir sendt igjennom et rør som er formet som en halvsirkel og ligger på et flatt underlag. Hvilken bane vil kulen trille langs etter at den har kommet ut av røret? Se Figur 21.29.1.

Når kulen forlater røret, har den ikke lenger noen føringer. Det virker ingen horisontale krefter på kulen, og den vil fortsette i den retning som den forlater røret med. Dermed er B den riktige banen. Kulen er riktignok påvirket av vertikale krefter, henholdsvis tyngdekraft og normalkraft, men de er like store og motsatt rettet og påvirker derfor ikke kulens bane.

**Oppgave 31**

En pendel henger i et stativ, Figur 21.31.1, som står på en vekt og svinger frem og tilbake. Hvilket punkt er pendelen på når vekten viser mest?

1. Ved maksimalt utslag (A)
2. Midt mellom maksimalt utslag og passering av bunnpunkt (B)
3. Ved passering av bunnpunkt (C)
4. Vekten viser det samme hele tiden



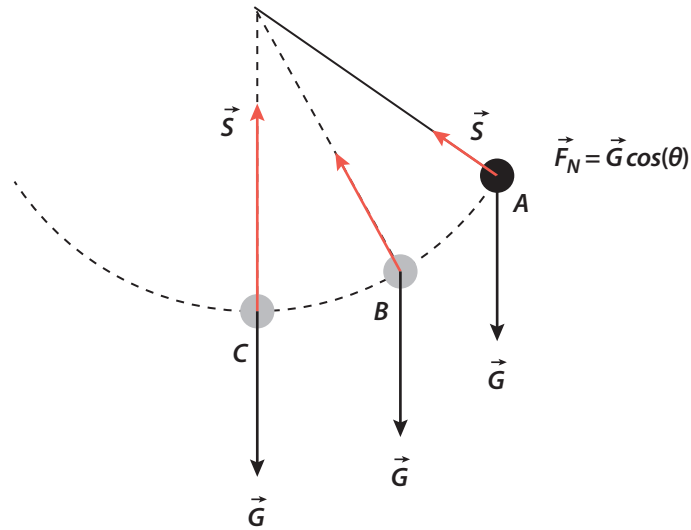
**Figur 21.31.1** Pendel

Her kan vi trekke vekslers på barndommens erfaringer. Når ble en trykket ned i husken, og når følte en seg nesten vektløs? En følte seg tyngst i punktet C og lettest i A. Hvorfor? Vel, det har med snordrag, tyngde og fart å gjøre. I punkt C virker tyngden i motsatt retning av snordraget, og pendelen har størst fart. Denne farten gir opphav til en sentripetalkraft som er lik snordraget minus tyngden. Dermed blir snordraget størst i C, og pendelen blir tyngst da det er snordraget som påvirker vekten. I punkt A derimot er farten lik null, og dermed er snordraget likt tyngdens komponent i snorens retning. I dette tilfellet ville vekten vise minst. I Figur 21.31.2 er kreftene som virker tegnet inn:

Sammenhengen mellom sentripetalkraft, snordrag og tyngde for en pendel kan skrives som:

$$F_{\text{sentripetal}} = S - F_N$$

I punkt C er  $F_N = G$ , og siden  $F_{\text{sentripetal}} > 0$ , vil  $S > G$ . Vekten vil altså vise en større tyngde for pendelen enn om den var i ro. I punkt A er  $F_{\text{sentripetal}} = 0$  siden pendelen der har null fart. Da blir  $S = F_N = G \cos(\theta)$ . Vekten vil vise mindre tyngde for pendelen enn om den hang rett ned og var i ro. I punkt B vil en ha en vekt som ligger et sted imellom det som måles i A og C siden pendelen har fart i B, men ikke så stor som i C. Alternativ 3: Ved passering av bunnpunkt (C), er altså det riktige svaret.



**Figur 21.31.2** Pendel med krefter inntegnet

Dersom du ønsker å lese mer om pendelen, kan du se i begynnelsen av kapittelet «Vel bevart».

### Oppgave 33

En partikkels posisjon er gitt som funksjon av tiden  $t$ :

$$x(t) = 5,0 \text{ m/s} \cdot t$$

$$y(t) = -9,8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 + 1 \text{ m}$$

Hvilke påstander (én eller flere) er riktige?

1. Startposisjonen er i origo
2. Startfarten er 5 m/s
3. Akselerasjonen er  $-9,8 \text{ m/s}^2$
4. Akselerasjonen er ikke konstant

I x-retningen gjenkjenner vi gode gamle  $s = v_0 t$  (med  $x = s$ ). Farten er 5,0 m/s, og vi har en jevn bevegelse i x-retning. I y-retningen har vi en konstant akselerert bevegelse, og vi ser at posisjonen er gitt av formelen (4.14):

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Her er  $x = s$  og vi mangler  $v_0 t$ -leddet da det ikke er noen startfart i y-retningen.

Så til påstandene. Er startposisjon i origo? Dersom vi definerer startposisjonen som det stedet partikkelen er ved tiden  $t = 0$  (meget vanlig), er det bare å sette  $t = 0$  og sjekke:

$$x(0) = 5,0 \text{ m/s} \cdot 0 = 0$$

$$y(0) = -9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0^2 + 1 \text{ m} = 1 \text{ m}$$

Startposisjonen er (0,1) og ikke origo (0,0), så påstand 1 er feil.

Er påstand 2 riktig? Startfarten i x-retning er konstant lik 5,0 m/s. Er det noe startfart i y-retning? La oss derivere for å finne farten som funksjon av tiden:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot t$$

Startfarten i y-retning finner vi ved å sette  $t = 0$ .

$$\frac{dy(0)}{dt} = -2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0 = 0 \text{ m/s}^2$$

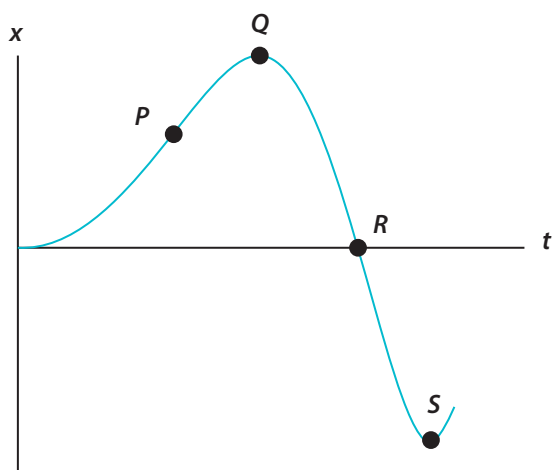
Det er altså kun startfart i x-retning, og den er 5,0 m/s. Påstand 2 er riktig.

Påstand 3 er uriktig, da akselerasjonen er  $2 \cdot (-9,8) \text{ m/s}^2 = -19,6 \text{ m/s}^2$

Akselerasjonen er konstant. Ved å derivere  $y(t)$  to ganger finner vi akselerasjonen  $a(t)$ :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -19,6 \text{ m/s}^2$$

Påstand 5 er uriktig. Den eneste påstanden som er riktig, er 2.



Figur 21.35.1 En partikkels posisjon som funksjon av tid

### Oppgave 35

En partikkel beveger seg langs en linje x. Grafen, Figur 21.35.1, viser partikkelens posisjon som funksjon av tiden.

Hva er hastigheten i punkt Q?

1.  $v < 0$
2.  $v = 0$
3.  $v > 0$

Ved punkt Q endrer ikke partikkelen sin posisjon, og hastigheten  $v$  er derfor lik 0. En annen måte å si det samme på er at grafen har et lokalt maksimum ved Q:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0$$

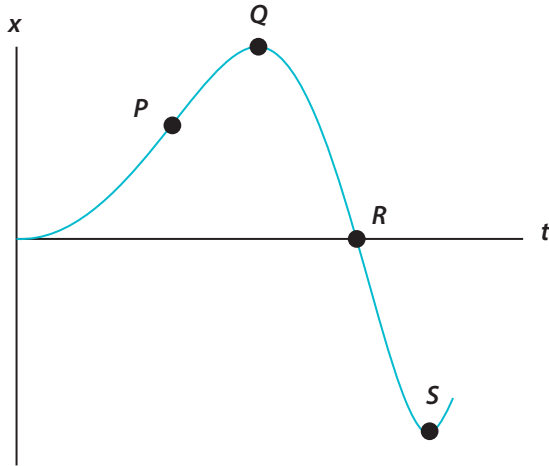
Alternativ 2 er derfor riktig.

### Oppgave 37

En partikkel beveger seg langs en linje  $x$ . Grafen, Figur 21.37.1, viser partikkelens posisjon som funksjon av tiden.

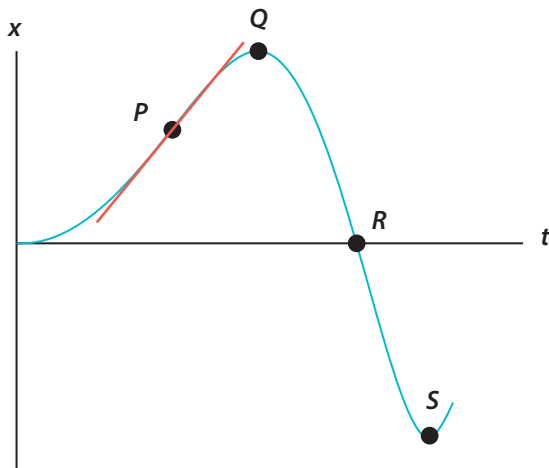
Hva er akselerasjonen i punkt Q?

1.  $a < 0$
2.  $a = 0$
3.  $a > 0$



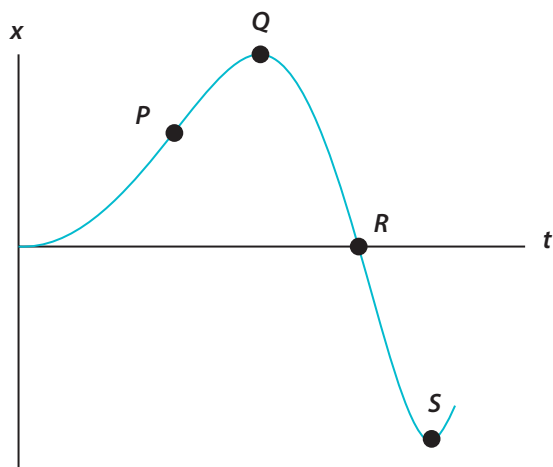
Figur 21.37.1 En partikkels posisjon som funksjon av tid

Akselerasjon er endring av hastighet,  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Akselerasjonen er altså den andrederiverte av posisjonen  $x(t)$ . For å finne akselerasjonen i punkt Q må en derfor finne den andrederiverte i punkt Q. Vi har ikke et uttrykk for funksjonen  $x(t)$ , kun en graf. Er det mulig å finne fortegnet på akselerasjonen i Q ved bare å se på grafen? Absolutt. La oss tegne grafen på nytt med en tangent i punktet P.



Figur 21.37.2 Graf med tangent inntegnet i punkt P

Vi ser at tangenten i et område rundt punktet P følger grafen. Tangentens stigning angir hastigheten ( $v = \frac{dx}{dt}$ ) til partikkelen i punktet P. Vi ser at i området rundt P følger graf og tangent hverandre. Det betyr at hastigheten i det området er konstant. Følger vi grafen videre mot Q, ser vi at den bøyer av i forhold til tangenten i P. Det betyr at hastigheten synker mot Q. Partikkelen har negativ akselerasjon. Påstand 1,  $a < 0$  er den riktige. Vi blir ikke spurt om det, men det kan jo være morsomt å analysere grafen fra begynnelse til slutt. I området ved origo ser vi at grafen følger t-aksen. Partikkelen starter altså med å være i ro. Så bøyer grafen av oppover mot punkt P. I dette området øker hastigheten, og akselerasjonen er større enn null. Når vi nærmer oss P (som i matematikken kalles et vendepunkt), minsker fartsøkningen og akselerasjonen går mot null. I punktet P er hastigheten konstant og akselerasjonen dermed lik null. Fra P til Q synker hastigheten, og akselerasjonen er negativ. I Q er hastigheten null, og den fortsetter å synke til R. Akselerasjon er negativ i hele området fra P til R. R er et nytt vendepunkt. Tegner du en tangent der, ser du at den følger grafen i området rundt R. Akselerasjonen er derfor lik null i R. Etter R er akselerasjonen positiv, og hastigheten stiger igjen og blir null i S.



Figur 21.39.1 En partikkels posisjon som funksjon av tid

### Oppgave 39

En partikkel beveger seg langs en linje  $x$ . Grafen, Figur 21.39.1, viser partikkelens posisjon som funksjon av tiden.

Hva er gjennomsnittshastigheten fra  $t = 0$  til punkt R?

1.  $v_{gj} < 0$
2.  $v_{gj} = 0$
3.  $v_{gj} > 0$

For å finne gjennomsnittshastigheten må en se på differansen i posisjon og tid:

$$v_{gj} = \frac{x(t_r) - x(0)}{\Delta t} = \frac{0 - 0}{\Delta t} = 0$$

Partikkelen har ikke flyttet seg når en ser på startpunkt ved  $t=0$  og slutt punkt R. Hva den har gjort i mellomtiden, er revnende likegyldig når en ser på gjennomsnittshastighet. Alternativ 2,  $v_{gj} = 0$  er det riktige.

### Oppgave 41

En ball starter fra ro og faller fritt. La  $T_1$  være tiden det tar fra ballen starter til den er halvveis til bakken, og  $T_2$  være tiden fra den er halvveis til den treffer bakken. Hvilken påstand er riktig?

1.  $T_1 = T_2$
2.  $T_1 = (1 + \sqrt{2})T_2$
3.  $T_2 = (1 + \sqrt{2})T_1$
4.  $T_1 = 2T_2$
5.  $T_2 = 2T_1$
6.  $T_1 = T_2^2$
7.  $T_2 = T_1^2$

La oss starte med eliminasjonsmetoden. Det vil si å fjerne de påstander som beviselig ikke er riktige. Påstand 6 og 7 kan ikke være riktige, da dimensjonene på hver side av ligningene er ulike. Siden ballen akselererer og får stadig større fart, vil tiden den bruker på siste halvdel av fallet være mindre enn for første del av fallet. Altså er  $T_1 > T_2$ . Da sitter vi igjen med følgende alternativer:

2.  $T_1 = (1 + \sqrt{2})T_2$
4.  $T_1 = 2T_2$

Sammenhengen mellom tilbakelagt strekning og tid for fritt fall er gitt av formelen 4.14:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Hvor  $g$  er tyngdens akselerasjon.

Dermed ryker påstand 4 også, da det ikke er en lineær sammenheng mellom strekning og tid. Vi står igjen med:

$$2. \quad T_1 = (1 + \sqrt{2})T_2$$

La oss sjekke for sikkerhets skyld. For første halvdel:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} g T_1^2$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

Så hele strekket:

$$2s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} g T_{\text{tot}}^2$$

$$T_{\text{tot}} = \sqrt{\frac{4s}{g}} = \sqrt{2} T_1$$

$T_2$  finner vi ved å ta totaltiden minus tiden for første halvdel av fallet:

$$T_{\text{tot}} = T_1 + T_2$$

$$\sqrt{2} T_1 = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{T_2}{(\sqrt{2} - 1)}$$

Oi, ikke helt likt hverken 2 eller 6, men la oss trylle litt med tredje kvadratsetning:

$$T_1 = \frac{T_2(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{T_2(1 + \sqrt{2})}{2 - 1} = (1 + \sqrt{2})T_2$$

Påstand 2 er riktig.

**Oppgave 43**

En ball beveger seg med konstant banefart i en sirkel. Hvilken påstand er riktig?

1. Ballen har null akselerasjon
2. Gjennomsnittlig hastighet for en runde er lik gjennomsnittlig banefart for samme runde
3. Ballen har konstant vinkelfrekvens
4. Ballen har konstant hastighet
5. Hvis vi kjenner banehastigheten og radien til sirkelbevegelsen, har vi nok informasjon til å regne ut akselerasjonen

---

Påstand 1 er ikke riktig. Ballen og dens hastighet endrer retning når den går i en sirkel. Akselerasjonen er lik denne hastighetsforandringen i tid. Akselerasjonen vil i dette tilfellet hele tiden peke mot sentrum av sirkelen.

Den gjennomsnittlige hastigheten finner en ved å ta differansen i posisjon dividert med differansen i tid. For en runde kommer en tilbake til utgangspunktet, og dermed blir den gjennomsnittlige hastigheten lik null. Den gjennomsnittlige farten (banefarten) er gitt av tilbakelagt distanse delt på tid. Den gjennomsnittlige banefarten blir lik den konstante banefarten. Påstand 2 er ikke riktig.

Ballens vinkelfrekvens er  $\omega = v/r$ . Siden både banefarten  $v$  og radius  $r$  i sirkelen er konstant, blir vinkelfrekvensen konstant. Påstand 3 er riktig.

Påstand 4 er ikke riktig. Ballens hastighet endrer retning hele tiden rundt sirkelen.

Påstand 5 er riktig, da en har følgende sammenheng mellom akselerasjon  $a$ , banefart  $v$  og radius  $r$ :  $a = v^2/r$ .

**Oppgave 45**

Et tog kjører på en rett jernbane 100 km/t. En dame går inne i toget med en hastighet 3 km/t mot togets bevegelsesretning. Hvilke påstander er riktig?

1. Damens hastighet er entydig bestemt, dvs. alle observatører vil måle samme hastighet
2. Det finnes observatører som vil måle at damen har en hastighetskomponent på tvers av togets fartsretning
3. En observatør som står i ro i forhold til skinnegangen, vil måle at damen har større fart enn det en observatør inne i toget måler

---

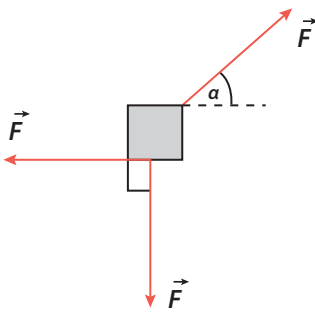
Påstand 1 er ikke riktig. Observatørens bevegelse relativt til damen vil påvirke resultatet av hastighetsmålingen. Observatøren ved skinnegangen måler for



eksempel  $(100 - 3) \text{ km/t} = 97 \text{ km/t}$ , mens en observatør som går sammen med damen vil måle  $0 \text{ km/t}$ . Skulle observatøren til alt overmål være i akselerasjon relativt til damen, ville han/hun måle at damens hastighet forandrer seg.

Samme hvordan en snur og vender på det, vil en tilfeldig observatør se at damen og toget beveger seg på sammen linje. Påstand 2 er ikke riktig.

Påstand 3 er riktig, og en vil ha en ren galileitransformasjon mellom observatøren ved skinnegangen og toget. Observatøren ved skinnegangen vil måle damens hastighet til  $(100 - 3) \text{ km/t} = 97 \text{ km/t}$ .



**Figur 21.47.1** Gjenstand som blir utsatt for krefter

#### Oppgave 47

En gjenstand blir påvirket av tre like store krefter  $|\vec{F}|$ . Se Figur 21.47.1. To av kreftene står vinkelrett på hverandre. Den siste kraften danner en vinkel  $\alpha$  med horisontalen. Hvilken påstand er riktig?

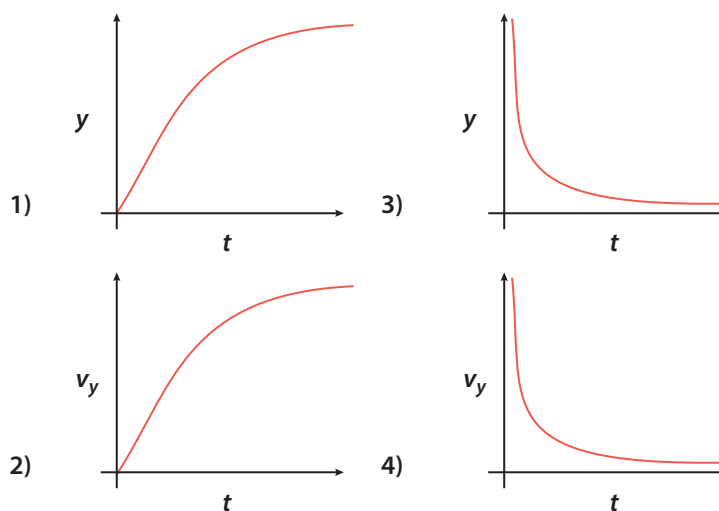
1. Det finnes en vinkel  $\alpha$  slik at gjenstanden er i ro
2. Gjenstanden vil akselerere bare for en bestemt verdi av  $\alpha$
3. Gjenstanden vil bevege seg med konstant, rettlinjert fart for en bestemt verdi av  $\alpha$
4. Gjenstanden vil akselerere for alle verdier av  $\alpha$

Her er vi så heldige å få vite at det er kun én av påstandene som er riktig. Påstand 1 og 3 er egentlig like dersom en forutsetter at gjenstanden i tilfelle 3 allerede beveger seg med konstant hastighet. I begge tilfeller må summen av krefter være null. Da kan vi forkaste påstandene fordi bare én skulle være riktig. Dersom gjenstanden i tilfelle 3 var i ro ved start, er det umulig å få den over i konstant hastighet med et konstant pådrag av krefter, da resultatkraften av de konstante kreftene vil sørge for at gjenstanden vil få en konstant akselerasjon. Dette var nærmest filosofiske betraktninger. La oss heller se på påstand 1 med en fysisk tilnærming. Er det mulig å finne en vinkel  $\alpha$  som får summen av krefter til å bli lik null? Summen av kreftene som står normalt på hverandre er  $\sqrt{2}|\vec{F}|$ , og vinkelen er  $-135^\circ$  i forhold til horisontalen. Vinkelen  $\alpha$  til den siste kraften må være  $45^\circ$  for å virke mot summen av de to andre kreftene, men kraften har en størrelse på  $|\vec{F}|$  som er  $\sqrt{2}$  mindre enn de andre kreftene. Resultantkraftens størrelse blir  $|\vec{F}_{Res}| = (\sqrt{2} - 1)|\vec{F}|$ . I dette tilfellet blir det er ikke mulig å finne en vinkel  $\alpha$  hvor gjenstanden er i ro. Påstand 1 er ikke riktig, og da påstand 3 er en avart av samme påstand, er heller ikke den riktig.

Vi har sett ovenfor at det er umulig å få summen av alle krefter til å bli null selv om vi velger den mest gunstige vinkel  $\alpha = 45^\circ$ . For alle andre vinkler vil resultatkraften bli større. Påstand 2 er uriktig og påstand 4 er riktig, da gjenstanden vil akselerere for alle verdier av  $\alpha$ .

## Oppgave 49

En gjenstand blir sluppet fra ro og faller mot bakken. Det virker luftmotstand på gjenstanden. Hvilken graf i Figur 21.49.1 beskriver bevegelsen best?  $y$  er posisjonen målt fra bakken og oppover,  $v_y$  er farten i vertikal retning, og  $t$  er tiden etter at vi slapp gjenstanden.



Figur 21.49.1 Grafer for beskrivelse av bevegelse

Luftmotstand har vi ikke studert så nøye før, men la oss prøve å se hvor langt vi kommer med eliminasjonsmetoden og vår fysiske intuisjon. Ifølge oppgaven er kun ett svar riktig. Graf 1 er i hvert fall ikke riktig, da den beskriver en oppadgående bevegelse.  $y$  øker med tiden  $t$ . Graf 3 er også åpenbart feil, for den sier at gjenstanden aldri når bakken, og det strider mot all fornuft og observasjoner. Graf 4 er også uriktig, da den beskriver en gjenstand som starter med stor fart. Når gjenstanden blir sluppet, er jo farten  $v_y$  lik null. Da har vi bare alternativ 2 igjen, og den grafen stemmer godt med observasjoner. Når gjenstanden blir sluppet, er farten lik null, så øker den lineært som funksjon av tiden på grunn av tyngdekraften ( $v = gt$ ), men når farten øker, vil luftmotstanden øke og minske gjenstandens akselerasjon mot null, og da oppnår gjenstanden jevn fart (terminalfart) som vist i grafen 2.

Er det mulig å beskrive dette mer matematisk? Vel, da må en vite mer om luftmotstandens innflytelse på bevegelsen. Vi ser at luftmotstanden øker med farten. Det kan uttrykkes  $F_{\text{luftmotstand}} = kv$ . Her er  $k$  en proporsjonalitetskonstant mellom kraften luftmotstanden virker på gjenstanden med og gjenstandens hastighet. Med dette på plass er det bare å finne frem Newtons andre lov igjen:

$$F = ma$$

Med positiv  $y$ -retning rettet nedover får vi:

$$mg - kv_y = m \frac{dv_y}{dt}$$

Denne differensialligningen kan skrives:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{m}v_y + g$$

eller

$$\frac{dv_y}{v_y - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m} dt$$

Med begynnelsesbetingelsen  $v_y(0) = 0$  får vi:

$$\int_0^{v_y} \frac{dv_y}{v_y - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

Integrasjon gir

$$\ln \left( \frac{v_y - \frac{mg}{k}}{-\frac{mg}{k}} \right) = -\frac{k}{m} t$$

Her er både teller og nevner negative når  $v_y < -\frac{mg}{k}$  slik at brøken er positiv som den må være, siden vi bare kan ta logaritmen til et positivt tall. Ved å ta 'e opphøyet i' på hver side og bruke at logaritmen er den inverse til eksponentialfunksjonen, får vi:

$$\frac{v_y - \frac{mg}{k}}{-\frac{mg}{k}} = e^{-\frac{k}{m}t}$$

Som gir hastigheten i  $y$ -retningen:

$$v_y(t) = \frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Er svaret rimelig? Vi vet at startbetingelsen er oppfylt, og når tiden går mot uendelig, så vil farten gå mot terminalfarten:

$$v_y(\infty) = \frac{m}{k}g$$

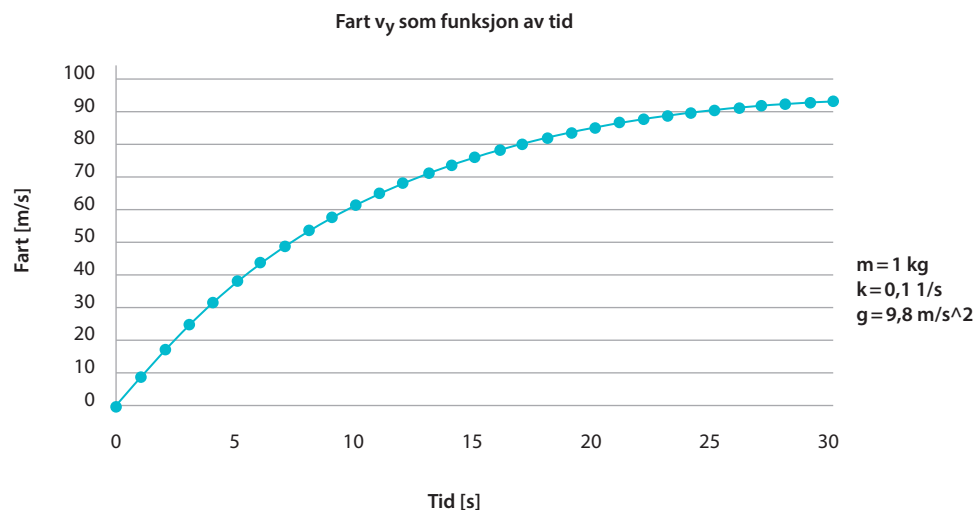
Jo større masse gjenstanden har, jo større blir terminalhastigheten. Er luftmotstanden  $k$  stor, vil terminalhastigheten bli mindre. I motsatt fall, dersom luftmotstanden er liten, vil terminalhastigheten gå mot uendelig, og det hele nærmer seg fritt fall som forventet. Hva med farten rett etter at gjenstanden blir sluppet? For å finne ut det må en se på rekkeutviklingen av  $e^{-\frac{k}{m}t}$  og kun ta med de første ledd:

$$e^{-\frac{k}{m}t} = 1 - \frac{k}{m}t + \dots$$

Innsatt i ligningen får en:

$$v_y(t \approx 0) = \frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \approx \frac{m}{k}g\left(1 - 1 + \frac{k}{m}t\right) = gt$$

Svaret for  $v_y(t)$  er altså meget rimelig. En kan jo for moro skyld sjekke det hele ved å tegne grafen basert på formelen vi har funnet:

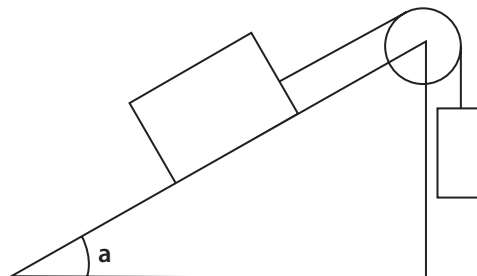


**Figur 21.49.2** Farten til gjenstand som faller med luftmotstand

### Oppgave 51

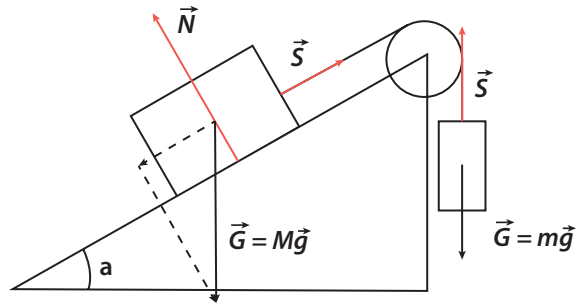
Klossen på skråplanet, Figur 21.51.1, har masse 1,0 kg. Klossen som henger i snoren har masse 0,5 kg. Anta at det ikke er friksjon noen steder i systemet. Hva må vinkelen  $a$  være for at klossene skal kunne ligge i ro?

1.  $20^\circ$
2.  $30^\circ$
3.  $45^\circ$
4.  $60^\circ$
5. Ikke nok informasjon til å avgjøre



**Figur 21.51.1** Hva skal til for at klossene er i ro?

Oppgaven her forutsetter at klossene er i ro i utgangspunktet, selv om det ikke er nevnt i oppgaveteksten. La oss starte med å tegne inn kreftene, Figur 21.51.2, som virker:


**Figur 21.51.2** Klosser med krefter inntegnet

For at klossene skal være i ro, må tyngdekraften som virker på klossen som henger i snoren være lik snordraget  $S$ .

$$S = mg$$

For klossen på skråplanet får en da:

$$S = Mg \cos(a)$$

En setter så sammen de to ligningene og får:

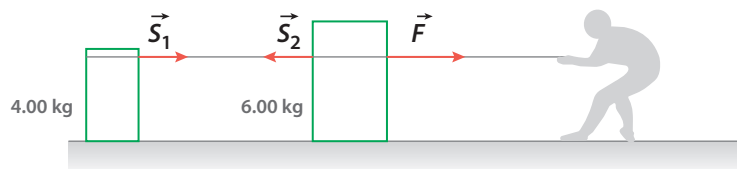
$$mg = Mg \cos(a) = 2mg \cos(a)$$

$$\cos(a) = \frac{1}{2}$$

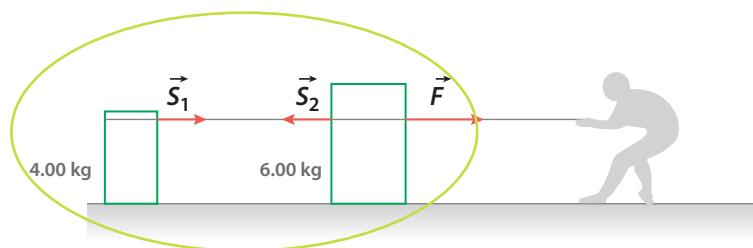
Da er det bare å huske hvilken vinkel som gir cosinus lik 0,5. Det er i hvert fall ikke  $20^\circ$  eller  $45^\circ$ . Jeg husker at cosinus til null grader er 1, og at cosinus til  $45^\circ$  er  $\sqrt{2}/2 \approx 0,71$ . Dermed må vinkelen være større enn  $45^\circ$ , og da er det kun  $60^\circ$  igjen å velge. Finner du frem kalkulatoren, vil du se at  $60^\circ$  gir cosinus lik 0,5.  $a$  må være  $60^\circ$ . Påstand 4 er riktig.

### Oppgave 53

Klossene trekkes med en kraft  $\vec{F}$  med størrelse på 20 N. Begge klossene glir friksjonsfritt på underlaget. Hvor store er snordragene  $\vec{S}_1$  og  $\vec{S}_2$ ? Anta at tauene er masseløse.


**Figur 21.53.1** Snordrag

La oss gå systematisk til verks og se på de to klossene som et system.



**Figur 21.53.2** Systemet med de to klossene

Hvor stor akselerasjon får dette systemet? Det er bare å finne frem Newtons andre lov:

$$(m + M)a = F$$

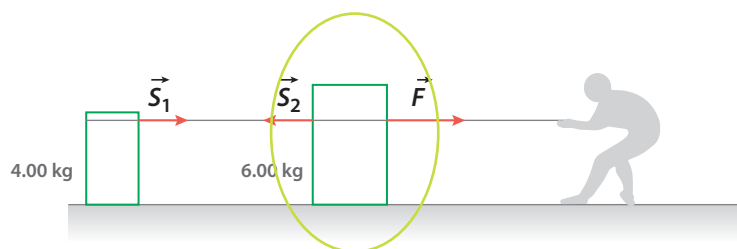
$$a = \frac{F}{m + M}$$

Så ser vi på den tyngste klossen som et system som blir påvirket av kreftene  $\vec{F}$  og  $\vec{S}_2$ . Den må ha samme akselerasjon som systemet med de to klossene:

$$Ma = F - S_2$$

Da er det bare å løse ligningen med hensyn på snordraget  $S_2$ :

$$S_2 = F - Ma = F - \frac{FM}{m + M} = \frac{Fm}{m + M} = \frac{20 \cdot 4}{4 + 10} \text{ N} = 8 \text{ N}$$



**Figur 21.53.3** Den tyngste klossen som system

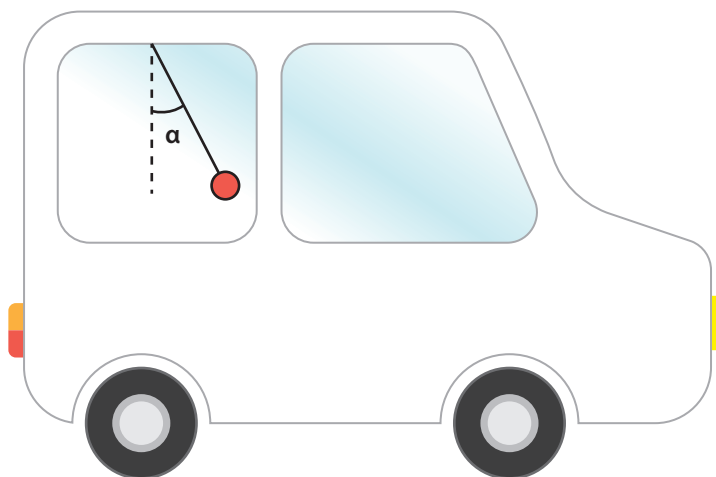
Hva blir så  $\vec{S}_1$ ? Den minste klossen vil ha samme akselerasjon  $a$  som hele systemet bestående av begge klossene:

$$S_1 = ma = \frac{mF}{m + M} = 8 \text{ N}$$

Snordragene  $S_1$  og  $S_2$  blir like, og det skyldes det faktum at tauet er masseløst. Hadde tauet hatt masse, ville  $S_1 < S_2$  fordi  $S_2$  da også måtte ha dratt på et tau med masse i tillegg til den minste klossen.

### Oppgave 55

En bil kjører mot høyre på en rett, horisontal vei, Figur 21.55.1. I bilen henger det en pendel. Utslaget til pendelen er fremover. Vinkelen med vertikalen er konstant lik  $\alpha$ .

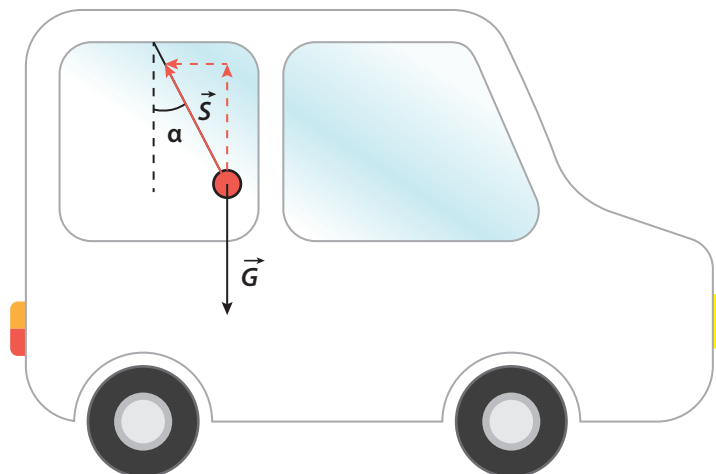


**Figur 21.55.1** Bil med pendel

Hvilken av påstandene om farten  $v$  og akselerasjonen  $a$  er riktig?

1. Farten  $v$  øker, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
2. Farten  $v$  øker, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
3. Farten  $v$  avtar, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
4. Farten  $v$  avtar, og akselerasjonen er:  $a = g \tan(\alpha) = g \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Med årelang erfaring som stående på Bybanen i Bergen, vet jeg at man fyker fremover når det bremses. For å få pendelen til å svinge ut i fartsretningen må altså bilens fart avta, og en sitter igjen med de to siste påstandene. Siden pendelen har et konstant utslag gitt av vinkelen  $\alpha$ , er akselerasjonen, retardasjonen i dette tilfellet, for bilen konstant. La oss tegne inn kreftene, Figur 21.55.2, som virker på pendelen.



**Figur 21.55.2** Kraftene som virker på pendelen

Vi ser at tyngdekraften  $\vec{G}$  og snordraget  $\vec{S}$  er de to kreftene som påvirker pendelen. Siden bilen akselererer, representerer den et akselerert referansesystem, og snordragets x-komponent er lik denne akselerasjonen. Hadde den ikke vært det, ville utslaget  $\alpha$  bli et annet. Utslaget  $\alpha$  kan altså brukes til å måle bilens akselerasjon. Akselerasjonen finner vi med geometri siden snordragets y-komponent er lik tyngden til pendelen.

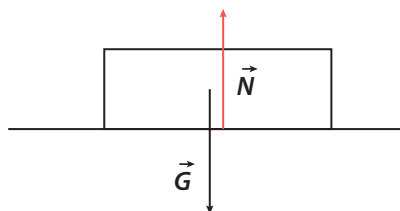
$$\tan(\alpha) = \frac{m_{\text{pendel}} a}{m_{\text{pendel}} g} = \frac{a}{g}$$

$$a = g \tan(\alpha) = g \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Påstand 3 er riktig.

### Oppgave 57

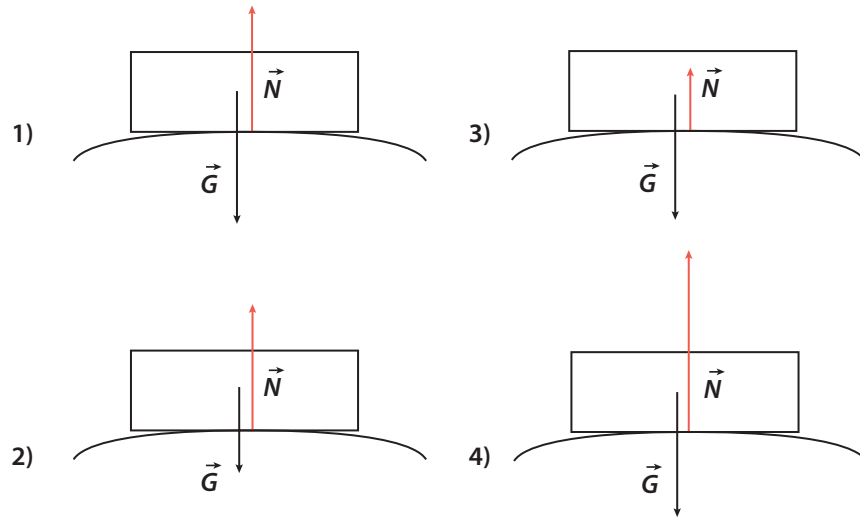
En kloss glir uten luftmotstand på et friksjonsfritt horisontalt underlag. Figuren Figur 21.57.1 viser kreftene som virker på klossen.



**Figur 21.57.1** Kraftene som virker på klossen



Etterpå glir klossen over en bakketopp uten å miste kontakten med underlaget. Hvilket alternativ i Figur 21.57.2 viser best kreftene som virker på klossen når den passerer bakketoppen?



**Figur 21.57.2** Ulike alternativer for krefter som virker på klossen ved bakketoppen

La oss starte med eliminasjonsmetoden. Tyngdekraften kan vi aldri slippe unna så lenge vi befinner oss på jorden. Alternativ 2 er ikke riktig. Dersom 1 hadde vært riktig, ville klossen fortsatt rett frem siden summen av kreftene er null og klossen hadde mistet kontakten med underlaget. Alternativ 4 er heller ikke riktig, for da ville også klossen mistet kontakten med underlaget. Vi står igjen med alternativ 3. Der er normalkraften mindre enn tyngden, og summen peker nedover og er lik sentripetalkraften.

$$F_{\text{sentripetal}} = G - N$$

Fra ligning (8.6) har vi et uttrykk for sentripetalakselerasjonen:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Ved å løse den første ligningen med hensyn på normalkraften, får vi:

$$N = G - F_{\text{sentripetal}} = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$$

Vi ser at jo større fart klossen har og jo krummere bakketoppen er, jo mindre blir  $N$ . I det motsatte tilfellet hvor enten farten eller krumningen blir liten, vil normalkraften ha samme størrelse som tyngdekraften som virker på klossen.

Hva skal til for å få følelsen av vektløshet?

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right) = 0$$

$$\frac{v^2}{r} = g$$

Sentripetalakselerasjonen må være lik tyngdens akselerasjon.

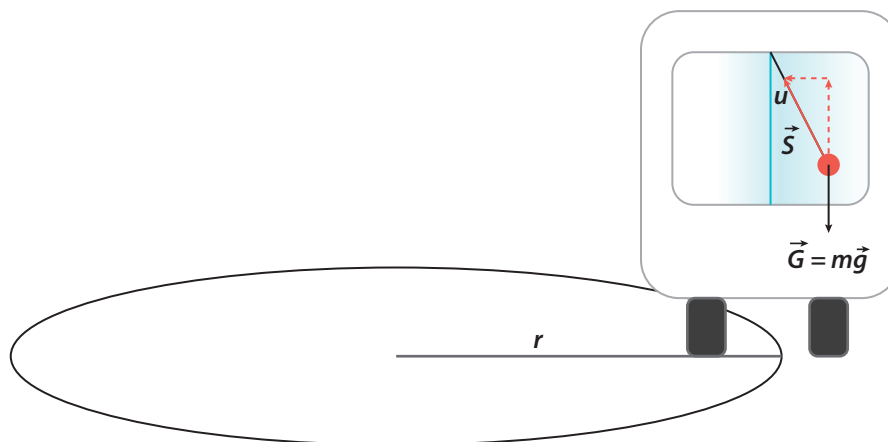
Den gang TV var lineært, var det en serie som het «Ikke gjør dette hjemme». Der foretok man en rekke eksperimenter av varierende farlighetsgrad. Dersom du ønsker å overbevise deg om at alternativ 3 er riktig, er det bare å finne en bakketopp og kjøre fort over. Du vil få følelsen av å sveve, siden normalkraften blir mindre. Det er jo normalkraften vi kjenner på kroppen. Selv husker jeg den barnslige gleden hele familien opplevde hver gang vi suste over, jo forttere jo bedre, en meget krum bakketopp i Os på vei til helgefryd.

### Oppgave 59

En buss kjører med konstant fart i en sirkelformet og horisontal sving. I bussen henger det en pendel. Pendelsnoren danner en vinkel  $u$  med vertikalen. Hva er radius i svingen?

1.  $r = \frac{g \tan(u)}{v^2}$
2.  $r = v^2 g \tan(u)$
3.  $r = \frac{v^2 \tan(u)}{g}$
4.  $r = \frac{v^2}{g \tan(u)}$

Bussen vil bli utsatt for en sentripetalkraft som er lik snordraget  $S$  sin horisontalkomponent. Se Figur 21.59.1.



Figur 21.59.1 Buss som kjører i sirkel med konstant fart

Sentripetalkraften kan vi finne ved hjelp av geometri:

$$S \cos(u) = mg$$

$$S = \frac{mg}{\cos(u)}$$

$$F_{\text{sentripetal}} = S \sin(u) = \frac{mg}{\cos(u)} \sin(u) = mg \tan(u)$$

Fra **ligning 8.6** har vi et uttrykk for sentripetalakselerasjonen:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Innsatt i ligningen gir det:

$$\frac{v^2}{r} = g \tan(u)$$

$$r = \frac{v^2}{g \tan(u)}$$

Alternativ 4 er det riktige svaret.

### Oppgave 61

Fiktive krefter (tilsynelatende krefter som opptrer fordi referansesystemet er akselerert) har noen ganger motkrefter, mens andre ganger har de det ikke.

1. Sant
2. Usant

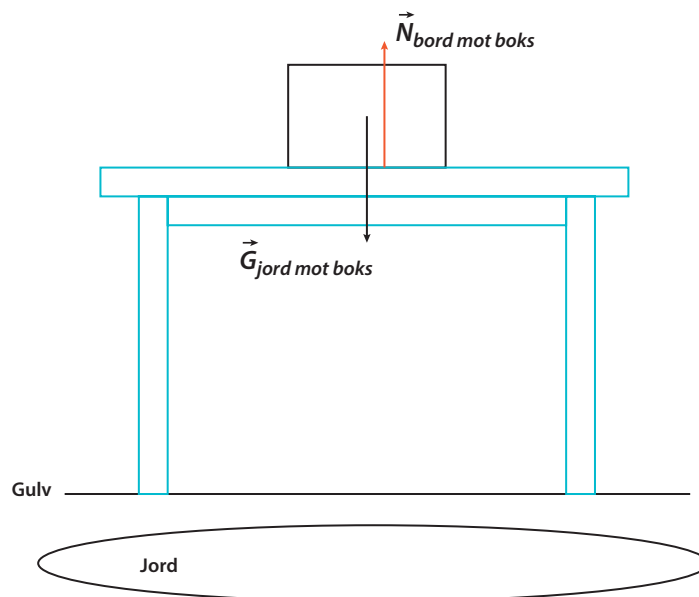
En alternativ definisjon av fiktive krefter er at de ikke har motkrefter. Utsagnet er altså usant, og påstand 2 er riktig. La oss se på noen tilfeller. Når en står på en roterende karusell, føles det som en blir dratt utover av en kraft. Årsaken til denne fiktive kraften er at karusellen roterer og dermed er et akselererende referansesystem. Dersom en er i en heis som akselerer oppover, vil en føle seg tyngre enn det en er. Igjen er det akselerasjonen som sørger for en fiktiv kraft. Denne gang virker den slik at normalkraften fra gulvet øker.

### Oppgave 63

En boks står stille på et horisontalt bord. Motkraften til tyngdekraften er normalkraften, dvs. den kraften bordet virker på boksen med slik at boksen ikke faller ned.

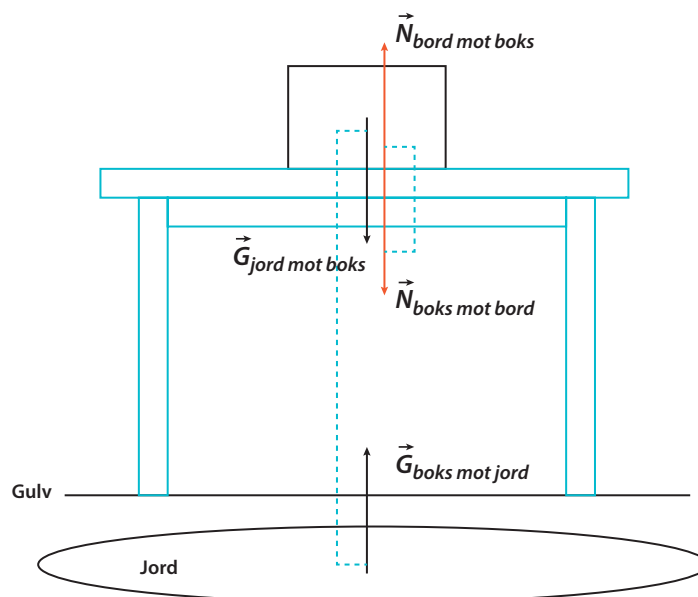
1. Sant
2. Usant

La oss starte med å lage en tegning med de oppgitte krefter inntegnet, Figur 21.63.1.



Figur 21.63.1 Boks på bord

Det er kanskje vanlig å trekke den feilslutning at  $\vec{G}_{\text{jord mot boks}}$  og  $\vec{N}_{\text{bord mot boks}}$  er motkrefter, da de er like store og motsatt rettet. Kravet til motkrefter er at de skal være like store og motsatt rettet, men virke på to ulike legemer. La oss tegne inn motkreftene til  $\vec{G}_{\text{jord mot boks}}$  og  $\vec{N}_{\text{bord mot boks}}$  i neste figur.

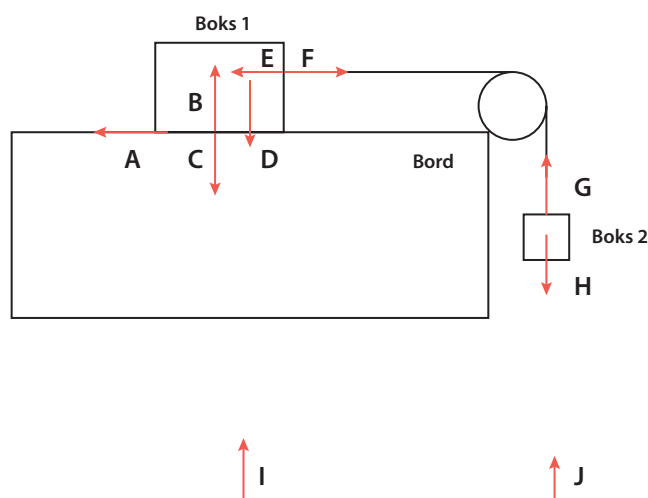


Figur 21.63.2 Boks på bord med krefter og motkrefter inntegnet

De stiplede linjene viser hvilke krefter som hører sammen, og som vi ser, virker motkreftene på ulike legemer. Påstand 2 er altså riktig.  $\vec{G}_{jord\ mot\ boks}$  og  $\vec{N}_{bord\ mot\ boks}$  er ikke motkrefter.

### Oppgave 65

Boks 1 ligger på et bord og er forbundet med boks 2 ved hjelp av et tau som går over en trinse, Figur 21.65.1. Identifiser korrekte kraft/motkraft-par i tegningen.



**Figur 21.65.1** Systemet med krefter inntegnet

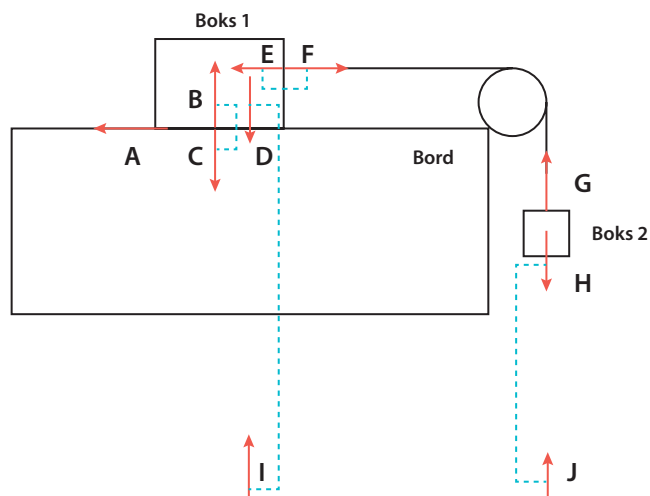
Merknader:

- Ikke alle kreftene som er relevante for systemet er tegnet inn
- Angrepspunktet for enkelte krefter er forskjøvet for å øke lesbarheten
- Det kan være upresissheter i tegningen som gjør at lengden på pil for kraft og motkraft ikke er eksakt like

Beskrivelse av kreftene:

- A: Friksjonskraft som virker på boks 1
- B: Normalkraft som virker på boks 1
- C: Normalkraft som virker på bordet
- D: Tyngdekraft som virker på boks 1
- E: Trekk-kraft som boks 1 virker på tauet med
- F: Snordrag som tauet virker på boks 1 med
- G: Snordrag som tauet virker på boks 2 med
- H: Tyngdekraft som virker på boks 2
- I: Tyngdekraft som boks 1 virker på jordkloden med
- J: Tyngdekraft som boks 2 virker på jordkloden med

Da er det bare å skride til verket. Definisjonen på et kraft/motkraft-par er at de skal være like store, motsatt rettet og virke på to ulike legemer. La oss tegne inn stiplede linjer i Figur 21.65.2 for å vise hvilke krefter som er par.



**Figur 21.65.2** Systemet hvor kraftpar er identifisert

Er det mulig å rettferdiggjøre disse valgene? Vel, D–I og H–J er kraft/motkraft-par som skyldes tyngdekraften, E–F kraftpar mellom boks 1 og tau, og B–C er normalkrefter mellom bord og boks 1. Alle parene tilfredsstiller definisjon på kraft/motkraft-par. Hva så med A og G? Her er ikke motkreftene tegnet inn i figuren. A har en motkraft som skyldes friksjonskraften fra boks 1 på bordet, og G har en motkraft fra boks 2. Alle krefter har en motkraft i henhold til Newtons tredje lov.

### Oppgave 67

Vektløshet er synonymt med fravær av tyngdekraft.

1. Sant
2. Usant

Ifølge Store norske leksikon er vektløshet en tilstand som oppnås ved fritt fall i vakuum. Du kan få en opplevelse av vektløshet ved å hoppe fra et bord eller lignende. At tyngdekraften fremdeles er til stede, vil du smertelig erfare når du lander. Påstanden er usann. På den internasjonale romstasjonen er tyngden 0,9 g, men allikevel opplever astronautene og kosmonautene vektløshet da de ramler rundt jorden.

**Oppgave 69**

En kule  $K_1$  med masse  $m$  henger i en fjær. I en snor som er festet til  $K_1$  henger det en kule  $K_2$  med masse  $2m$ . Massen til fjæren og snoren er neglisjerbar. I utgangspunktet henger kulene og fjæren i ro. Vi klipper så av snoren mellom kulene. Hva er absoluttverdien av akselerasjonen til de to kulene like etter at snoren er klippet?

1.  $a_{K_1} = 2g, a_{K_2} = g$
2.  $a_{K_1} = 2g, a_{K_2} = 2g$
3.  $a_{K_1} = 3g, a_{K_2} = g$
4.  $a_{K_1} = 3g, a_{K_2} = 2g$
5.  $a_{K_1} = g, a_{K_2} = g$

Her var det mange alternativer. Ren gjetting blir dermed et sjansespill. La oss tenke litt isteden. Når vi klipper snoren, vil kun tyngdekraften virke på  $K_2$ . Dermed er  $a_{K_2} = g$  og påstandene 2 og 4 uriktige. Før snoren klippes, er systemet fjær og kuler i likevekt og  $F_{fjær} = 3mg$ . Rett etter at snoren blir klippet, vil fjærkraften og tyngdekraften virke på  $K_1$  og resultantkraften blir:

$$F_{res} = F_{fjær} - mg = 3mg - mg = 2mg$$

Akselerasjonen til  $K_1$  blir derfor:

$$a_{K_1} = 2g$$

Påstand 1 er riktig.

**Oppgave 71**

En ishockey puck ligger stille på is som vi kan regne som friksjonsfri. En annen, identisk puck glir rett mot den som ligger stille med fart  $5,0 \text{ m/s}$ . Hvor stor fart har den pucken som i utgangspunktet lå i ro etter at den ble truffet? Du kan regne med at ingen energi gikk tapt i kollisjonen.

Her må vi bruke loven om bevaring av bevegelsesmengde:

Dersom summen av alle krefter som virker på et system er null, er den totale bevegelsesmengde konstant.

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_A + \dots = m\vec{v}_A + m\vec{v}_B + \dots = \text{konstant.}$$

Siden det i oppgaveteksten er oppgitt «rett mot», kan vi droppe vektornotasjonen. La oss skrive opp før- og etter-situasjonen:

$$m v_{1\text{ før}} + m v_{2\text{ før}} = m v_{1\text{ etter}} + m v_{2\text{ etter}}$$

$$v_{1\text{ før}} + v_{2\text{ før}} = v_{1\text{ etter}} + v_{2\text{ etter}}$$

$$v_{1\text{ før}} = v_{1\text{ etter}} + v_{2\text{ etter}}$$

For å komme videre trenger vi mer informasjonen, og det får vi fra loven om bevaring av mekanisk energi:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g h_1 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g h_2 + \dots = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 + m_i g h_i \right) = \text{konstant}$$

Før- og etter-situasjonen:

$$\frac{1}{2} m v_{1\text{ før}}^2 + \frac{1}{2} m v_{2\text{ før}}^2 = \frac{1}{2} m v_{1\text{ etter}}^2 + \frac{1}{2} m v_{2\text{ etter}}^2$$

$$v_{1\text{ før}}^2 + v_{2\text{ før}}^2 = v_{1\text{ etter}}^2 + v_{2\text{ etter}}^2$$

$$v_{1\text{ før}}^2 = v_{1\text{ etter}}^2 + v_{2\text{ etter}}^2$$

Da har vi to ligninger med to ukjente, henholdsvis  $v_{1\text{ etter}}$  og  $v_{2\text{ etter}}$ :

$$v_{1\text{ før}} = v_{1\text{ etter}} + v_{2\text{ etter}}$$

$$v_{1\text{ før}}^2 = v_{1\text{ etter}}^2 + v_{2\text{ etter}}^2$$

La oss kvadrere den første:

$$v_{1\text{ før}}^2 = (v_{1\text{ etter}} + v_{2\text{ etter}})^2 = v_{1\text{ etter}}^2 + 2 v_{1\text{ etter}} v_{2\text{ etter}} + v_{2\text{ etter}}^2$$

Vi ser da at for å få konsistens mellom de to ligningene må:

$$2 v_{1\text{ etter}} v_{2\text{ etter}} = 0$$

Det betyr at enten  $v_{1\text{ etter}}$  eller  $v_{2\text{ etter}}$  må være lik null. At  $v_{2\text{ etter}}$  er lik null er umulig, for da hadde pucken som hadde fart 5 m/s fortsatt med denne farten rett igjennom den andre pucken. Pucken som hadde en fart på 5 m/s vil etter støtet være i ro, og all bevegelsesmengde og energi vil bli overført til den andre pucken som vil få en fart på  $v_{2\text{ etter}} = 5$  m/s.



**Oppgave 73**

Hvor stor startfart må du gi en ball med masse 0,20 kg for å kaste den 8 meter rett opp? Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  og se bort fra luftmotstand.

Siden den mekaniske energien er bevart, er tap av kinetisk energi lik økning av potensiell energi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

som gir

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 8} \text{ m/s} = 12,5 \text{ m/s}$$

**Oppgave 75**

En mann står i en heis og holder en pakke med masse 1,0 kg i en snor. Hvor stort er snordraget når heisen akselerer nedover med en konstant akselerasjon  $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ ? Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Det er kun to krefter som virker på pakken, nemlig tyngdekraften og snordraget. Summen av de to kreftene skal sørge for en akselerasjon nedover. For å få det til må tyngdekraften  $\vec{G}$  være større enn snordraget  $\vec{S}$ :

$$G - S = ma$$

$$S = G - ma = m(g - a) = 1,0(9,8 - 0,5) \text{ N} = 9,3 \text{ N}$$

Snordraget er 9,3 N.

**Oppgave 77**

En kule med masse 2,5 kg løftes opp med jevn fart til 1,5 meter i løpet av 2 sekunder. Hvor stor effekt yter den som løfter kulen? Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

La oss beregne arbeidet, som er kraft multiplisert med vei for rettlinjet bevegelse, først:

$$W = Fs = mgs = 2,5 \cdot 9,8 \cdot 1,5 \text{ Nm} = 36,8 \text{ J}$$

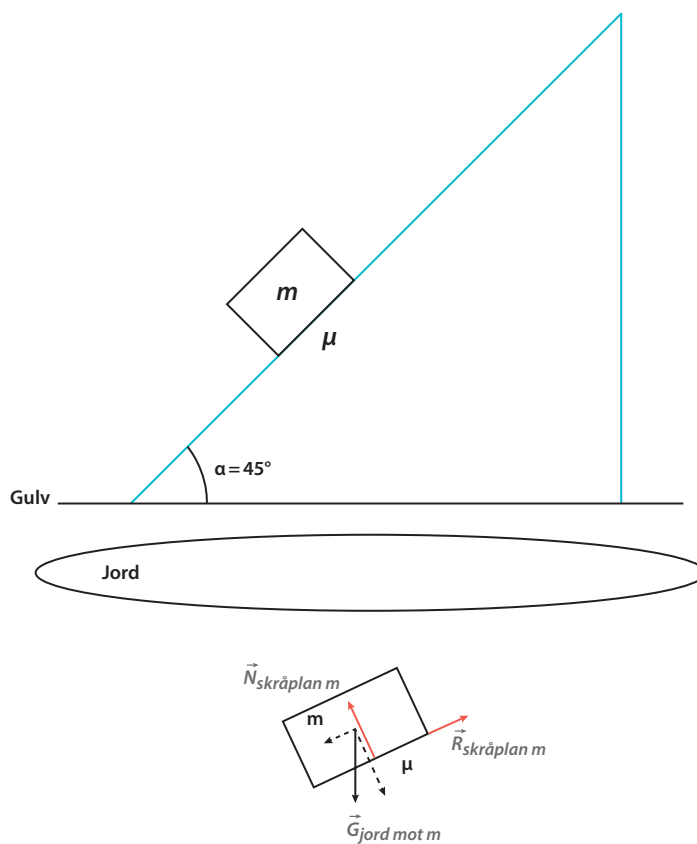
Kulen blir løftet jevnt i løpet av 2 sekunder, så effekten som ytes er:

$$P = 36,8/2 \text{ J/s} = 18,4 \text{ W}$$

**Oppgave 79**

En kloss med masse 1,0 kg glir nedover et skråplan med helningsvinkel  $45^\circ$ . Friksjonskoeffisienten er  $\mu = 0,2$ . Regn med  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Hvor stor er akselerasjonen?

La oss starte med å tegne en figur og tilhørende frilegemediagram for klossen.



**Figur 21.79.1** Kloss på skråplan og tilhørende frilegemediagram for klossen

Så er det bare å finne frem Newtons andre lov for å finne akselerasjonen nedover skråplanet:

$$ma = mg \sin(45^\circ) - \mu mg \cos(45^\circ) = mg \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \mu) \right) = 1 \cdot 9,8 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,8 \right) \text{ N} =$$

$$5,5 \text{ N} \quad a = \frac{5,5 \text{ N}}{1,0 \text{ kg}} = 5,5 \text{ m/s}^2$$

Akselerasjonen er  $5,5 \text{ m/s}^2$ .

**Oppgave 81**

En curlingstein med masse 19,0 kg som ligger i ro på isen, blir truffet av en annen curlingstein. I kollisjonen blir den første curlingsteinen tilført 38,0 J kinetisk energi. Hvor stor fart har den første steinen etter kollisjonen?

Da er det bare å finne frem formelen for kinetisk energi:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 38}{19}} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

Farten etter kollisjonen blir 2 m/s.

### Oppgave 83

Vi slipper en ball fra et hustak. Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken 15 meter nedenfor? Regn med tyngdeakselerasjon  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  og se bort fra luftmotstand.

Her er det bare å finne frem formelen for strekning  $s$  gitt i kapittelet «Historisk sett», (4.14).

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Siden ballen faller nedover i tyngdefeltet:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Vi antar at ballen startet fallet fra å være i ro:

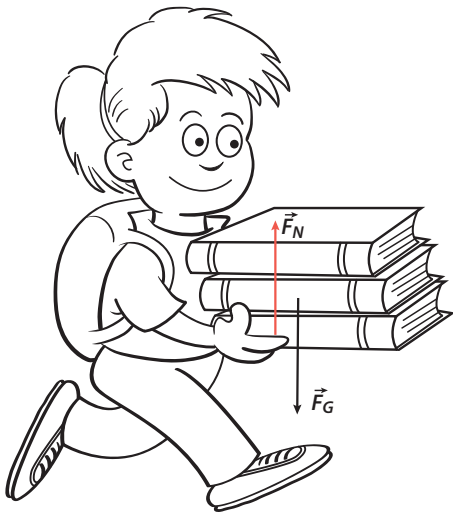
$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{9,8}} \text{ s} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{9,8}} \text{ s} = 1,75 \text{ s}$$

Det tar 1,75 sekunder før ballen når bakken.

### Oppgave 85

Du går på et horisontalt gulv og bærer en tung lærebok med masse 2,5 kg, Figur 21.85.1. Boken har hele tiden konstant avstand til gulvet. Hvor stort arbeid utfører du på boken når du går 10 meter med konstant hastighet 2 m/s?



**Figur 21.85.1** Hvor stort er arbeidet som utføres på boken?

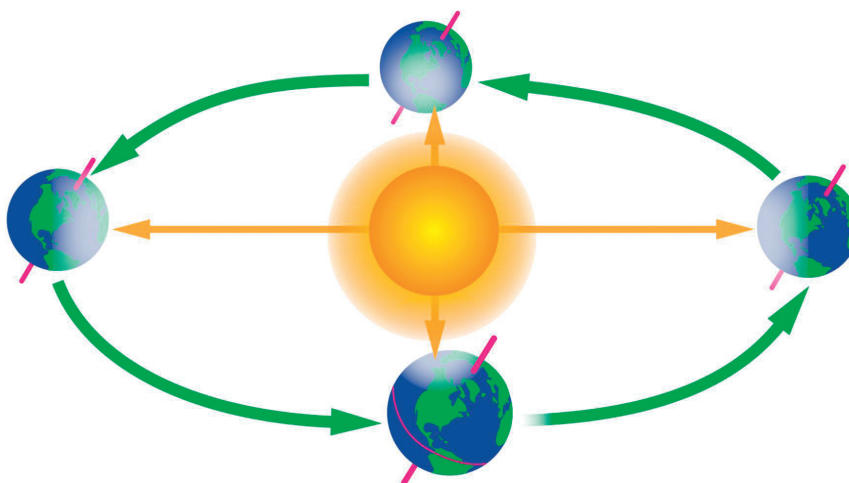
Dette er en klassiker blant fysikkoppgaver, da den bryter med tilvante forestillinger om hva arbeid er. For deg som bærer bøkene er det et slit, mens fysikkens definisjon av arbeid er kraft multiplisert med vei. Dette så vi på i kapittelet «Vel bevart», og formelen for arbeidet ble gitt av (9.22).

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Dette er et linjeintegral som for retlinjet bevegelse blir  $W = Fs \cos(\theta)$ . Vinkelen  $\theta$  er vinkelen mellom  $F$  og  $s$ . Hvilke krefter virker på boken? Vi har tyngdekraften og normalkraften. Vi har ingen kraft i bevegelsesretningen, da bøkene bæres med konstant hastighet. Vi ser at normalkraften og tyngdekraften begge virker normalt på bevegelsesretningen, og dermed blir arbeidet  $W = 0$  J. Til alt overmål så virker de to kreftene i motsatt retning og er like store, summen er null, og vil av den grunn heller ikke gi noe bidrag til arbeidet.

### Oppgave 87

Jorden bruker 365,242 dager = 8766 timer på en runde rundt solen, se Figur 21.87.1. Banen er elliptisk med en liten eksentrisitet, men anta for enkelhets skyld at den er perfekt sirkulær. Med en radius på 149,6 millioner km får vi da en sentripetalakselerasjon  $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$ . Massen til jorden er  $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Hvor stort arbeid gjør solen på jorden for hver runde?



**Figur 21.87.1** Jorden i bane rundt solen

Da det antas at jorden går i en sirkel rundt solen, vil sentripetalkraften alltid stå normalt på strekningen  $s$ , og arbeidet som tilføres per runde vil derfor være null,  $W = 0$  J. Hadde banen vært mer eksentrisk, ville hastigheten variert langs banen, mens summen av den potensielle og den kinetiske energien ville vært konstant. Skal det utføres arbeid på et himmellegeme som går i bane rundt et annet, må det ytre krefter til. Romsonden Voyager 1 kan nevnes som eksempel på dette. Da den skulle sendes ut av solsystemet, ble de store planetene brukt til å akselerere sonden. Litt av deres energi ble overført til Voyager 1. Det ble utført et arbeid på de store planetene som resulterte i en ubetydelig endring i deres baner.

**Oppgave 89**

En ball med masse  $m = 0,43$  kg faller rett ned fra 20 meter høyde. Luftmotstanden kan beskrives som  $F(v) = 0,05$  kg/m  $\cdot$   $v^2$ . Regn med tyngdeakselerasjon  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

- Hvor lang tid bruker ballen på å falle de 20 meterne ned til bakken?
- Hvor stor er ballens fart i landingsøyeblikket?
- Hvor stor er ballens akselerasjon i landingsøyeblikket?
- Hvor stort arbeid utføres på ballen?

I dette tilfellet tar Newtons andre lov formen:

$$mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

Der  $k = 0,05$  kg/m.

Denne ligningen kan skrives:

$$\frac{dv}{\frac{k}{mg}v^2 - 1} = -gdt$$

Med begynnelsesbetingelsen  $v(0) = 0$  får vi:

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{k}{mg}v^2 - 1} = -g \int_0^t dt$$

Integrasjon gir:

$$\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v\right) = \sqrt{\frac{gk}{m}}t$$

som gir:

$$v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)$$

Med begynnelsesbetingelsen  $y(0) = 0$  får vi:

$$y = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right) dt = \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)\right)$$

eller

$$t = \sqrt{\frac{m}{gk}} \cosh^{-1}\left(e^{\frac{k}{m}y}\right)$$

Innsetting av  $m = 0,43$  kg,  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>,  $k = 0,05$  kg/m og  $y = 20$  m gir  $t = 2,8$  s og svaret på oppgave a).

Den tilsvarende falltiden uten luftmotstand er:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2,0 \text{ s.}$$

Ved å sette inn uttrykket for tiden og bruke at  $\tanh(x) = \sqrt{1 - 1/(\cosh(x))^2}$  i uttrykket for hastigheten fås:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \sqrt{\frac{m}{gk}} \cosh^{-1}\left(e^{\frac{k}{m}y}\right)\right) = \\ &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \sqrt{1 - 1/(\cosh(\cosh^{-1}(e^{\frac{k}{m}y})))^2} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \sqrt{1 - e^{-2\frac{k}{m}y}} \end{aligned}$$

Innsetting av de gitte størrelsene gir  $v = 9,13 \text{ m/s}$  som er svar på b).

Vi kan sjekke hva uttrykket for hastigheten som funksjon av posisjonen gir dersom luftmotstanden er liten,  $ky/m \ll 1$ . Da kan vi nøye oss med å bruke de to første leddene i rekkeutviklingen for eksponentialfunksjonen,  $e^{-2\frac{k}{m}y} \approx 1 - 2\frac{k}{m}y$ .

Det gir:  $v_0 \approx \sqrt{2gy}$  som stemmer med det vi får uten luftmotstand. Med  $y = 20 \text{ m}$  fås  $v_0 = 19,8 \text{ m/s}$ , så luftmotstanden gjør en stor forskjell her.

I oppgave c) skal vi finne akselerasjonen. Ved å derivere uttrykket for hastigheten med hensyn på  $y$  fås:

$$\begin{aligned} dv &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\frac{k}{m}y}}} \left(-2\frac{k}{m}\right) \left(e^{-2\frac{k}{m}y}\right) dy = g \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}} \sqrt{1 - e^{-2\frac{k}{m}y}}} e^{-2\frac{k}{m}y} dy \\ v dv &= g e^{-2\frac{k}{m}y} dy \end{aligned}$$

som gir:

$$v \frac{dv}{dt} = g e^{-2\frac{k}{m}y} \frac{dy}{dt} = g e^{-2\frac{k}{m}y} v$$

Dermed fås akselerasjonen:

$$a = \frac{dv}{dt} = g e^{-2\frac{k}{m}y}$$

Innsetting av de oppgitte størrelsene gir  $a = 0,093 \text{ m/s}^2$ .

Vi kan også foreta en liten sjekk: Fra uttrykket for hastigheten har vi:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \sqrt{1 - e^{-2\frac{k}{m}y}} \\ g e^{-2\frac{k}{m}y} &= g - \frac{k}{m} v^2 \end{aligned}$$

Innsetting i uttrykket for akselerasjonen gir:

$$ma = m\left(g - \frac{k}{m}v^2\right) = mg - kv^2$$

Det er differensialligningen vi startet med. Alt vel!

Arbeidet som utføres på ballen, oppgave d), kan finnes ved å se på endringen i kinetisk energi.

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,43 \text{ kg} \cdot (9,13 \text{ m/s})^2 = 17,9 \text{ J}$$

Uten luftmotstand hadde arbeidet blitt større:

$$W_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,43 \text{ kg} \cdot (19,8 \text{ m/s})^2 = 84,3 \text{ J}$$

Arbeidet som friksjonen utfører på ballen, er:

$$W - W_0 = (17,9 - 84,3) \text{ J} = -66,4 \text{ J}$$

### Oppgave 91

Et prosjektil beveger seg jevnt rettlinjet. På et tidspunkt sprenges prosjektilet i to biter som flyr videre. Den ene biten har  $2/3$  av den opprinnelige massen og beveger seg mot høyre relativt til den opprinnelige bevegelsesretningen. Den andre biten har  $1/3$  av den opprinnelige massen og beveger seg mot venstre relativt til den opprinnelige bevegelsesretningen. (Hastighetsvektoren før delingen og de to hastighetsvektorene etter delingen ligger alle i samme plan.) Hvor går hastighetsvektoren til massesenteret etter at prosjektilet har delt seg?

---

Massesenteret til prosjektilet vil under alle omstendigheter følge den opprinnelige rettlinjede bevegelsen, altså mot høyre. La meg utdype. Prosjektilet er ikke påvirket av ytre krefter siden det beveger seg jevnt rettlinjet. En kan da la et inertialsystem følge massesenteret. I dette inertialsystemet er det totale momentet for massesenteret til prosjektilet null både før og etter sprengning. Siden systemet prosjektil ikke er blitt påvirket av ytre krefter, vil derfor massesenteret ha sin opprinnelige fart også etter sprengning.

### Oppgave 93

En kollisjon må være elastisk for at bevegelsesmengden skal være bevart.

1. Sant
2. Usant

---

2. Usant. Bevegelsesmengden er alltid bevart i et støt. Når støtet er elastisk, er det mellom to stive legemer, og da er også den mekaniske energien bevart.

**Oppgave 95**

En ball med masse 100 g blir sluppet fra høyde 5,0 m. Den treffer gulvet og spretter opp igjen. Hvilken endring av bevegelsesmengde får ballen i sammenstøtet med bakken dersom det er en elastisk kollisjon? Se bort fra luftmotstand og regn med tyngdeakselerasjon  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Siden den mekaniske energien er bevart, er tap av kinetisk energi lik økning av potensiell energi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

som gir

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 5,0} \text{ m/s} = 9,9 \text{ m/s}$$

Siden støtet er elastisk og ballen reverseres i retning, vil endringen i bevegelsesmengde bli:

$$\Delta p = 2mv = 2 \cdot 0,1 \cdot 9,9 = 2,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

**Oppgave 97**

Hvilke påstander om energi er riktig?

1. Energi er en bevart størrelse
2. Hvis energien til et objekt måles fra to inertialsystemer, vil verdien alltid være lik
3. Arbeid innebærer overføring av energi
4. Energi er en vektorstørrelse

I et lukket system er energien bevart, så påstand 1 er riktig så lenge vi ser på et lukket system. Påstand 2 kan vi raskt avlive med et eksempel. En partikkel som beveger seg jevnt rettlinjet, vil ha en energi gitt av  $E = \frac{1}{2}mv^2$ . Farten til partikkelen er avhengig av hvilket inertialsystem vi følger den med. I et inertialsystem som følger partikkelen vil  $E = 0$ , og i alle andre vil  $E > 0$ . Verdien til energien vil altså være avhengig av inertialsystemet partikkelen observeres i. Påstand 3 er riktig da definisjonen på energi er evnen til å utføre arbeid. Utfører vi arbeid på et system, endres systemets energi. Påstand 4 er uriktig. Energi er en skalar størrelse.

**Oppgave 99**

Energi er bevart uavhengig av hvilke typer krefter som virker.

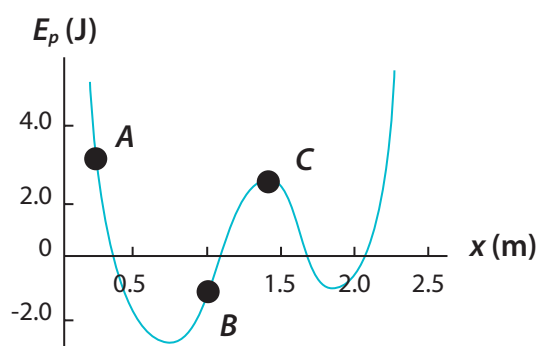
1. Sant
2. Usant



Energien i et system er bevart så lenge det ikke virker ytre krefter på det. Riktignok vil det i et system kunne sies at den mekaniske energien ikke er bevart dersom det virker ikke-konservative krefter, som for eksempel friksjon. Dersom en ser mikroskopisk på det, er også friksjon en konservativ kraft, da det utvikles varme. Man antar at alle krefter i naturen er konservative. Hva blir så riktig svar på påstanden? Den blir usann dersom vi også tar med muligheten for ytre krefter.

### Oppgave 101

Hvis partikkelen har total mekanisk energi 4,0 J, i hvilket punkt, Figur 21.101.1, har den størst kinetisk energi?

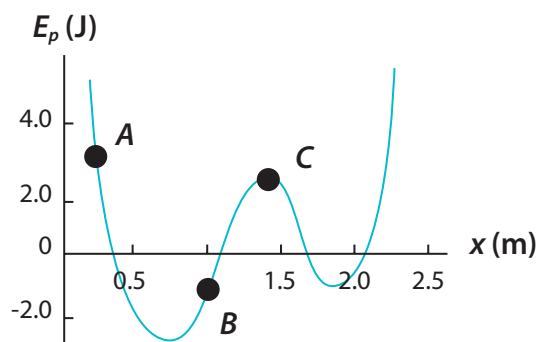


Figur 21.101.1 Potensiell energi som funksjon av posisjon

Punkt B har den laveste potensielle energien.

### Oppgave 103

Hvis partikkelen, Figur 21.103.1, starter fra punkt C, kan den da nå punkt A?



Figur 21.103.1 Potensiell energi som funksjon av posisjon

Vi vet ikke noe mer enn den potensielle energien. Har for eksempel partikkelen ingen fart i punkt C, kan den aldri nå punkt A, men skulle totalenergien i C være større enn den potensielle energien i A, så hadde det vært mulig å nå A. Vi har for lite informasjon til å kunne svare på spørsmålet.

### Oppgave 105

Kan det komme lyd fra en fullstendig elastisk kollisjon?

I en fullstendig elastisk kollisjon er den mekaniske energien bevart, og det vil ikke avgis noe energi i form av lyd eller annet.

### Oppgave 107

Kule 1 har masse  $m_1 = 100$  g og fart  $v_1 = 2$  m/s. Kule 2 har masse  $m_2 = 400$  g og fart  $v_2 = 1$  m/s. Hvilken kule har størst kinetisk energi?

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 2^2 \text{ J} = 0,2 \text{ J}$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 1^2 \text{ J} = 0,2 \text{ J}$$

Kulene har like stor kinetisk energi.

### Oppgave 109

En kule beveger seg langs x-aksen med  $v_x = 2$  m/s. Den har da kinetisk energi  $E_{ki} = 0,2$  J. Ved  $x = 5$  m kolliderer den med en vegg og blir sendt tilbake, slik at den etter kollisjonen beveger seg langs x-aksen med  $v_x = -2$  m/s. Hva er den kinetiske energien,  $E_{kf}$ , etter kollisjonen?

Da kulen ikke har mistet fart, men bare forandret retning, vil den kinetiske energien før og etter kollisjonen med veggen være lik:  $E_{kf} = 0,2$  J.

### Oppgave 111

To kuler kolliderer elastisk. Total bevegelsesmengde for systemet er 0, og ingen ytre krefter virker. Hva er vinkelen mellom hastighetsvektorene til kulene etter kollisjonen?

Siden den totale bevegelsesmengden er null,  $\Delta\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$ , må kulene bevege langs en rett linje før støtet. Da bevegelsesmengden er bevart, vil kulene også bevege seg langs en rett linje etter støtet, men ikke nødvendigvis den samme rette linje som før støtet. Kulene vil gå fra hverandre etter kollisjonen, og vinkelen mellom hastighetsvektorene må derfor være  $180^\circ$ .

**Oppgave 113**

To kuler kolliderer elastisk. Total bevegelsesmengde for systemet er 0, og ingen ytre krefter virker. Vi velger oss en av kulene og ser på vinkelen mellom hastighetsvektor før og hastighetsvektor etter kollisjonen. Hvor stor er denne vinkelen?

Hva vet vi? Kollisjonen er elastisk, og det betyr at den kinetiske energien er bevart, og så vet vi at den totale bevegelsesmengden er bevart og lik null. Hva skal til for å finne vinkler mellom før og etter? Da må vi se på hastighetsendringer. La oss se på kulene i et xy-plan:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2x}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1x'}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2x'}^2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1y}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2y}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1y'}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2y'}^2$$

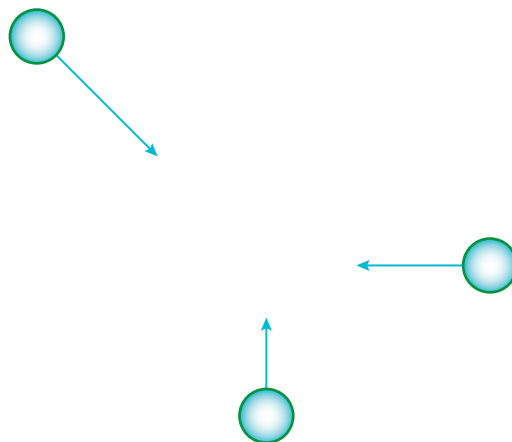
$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x'} + m_2 v_{2x'} = 0$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y'} + m_2 v_{2y'} = 0$$

Problemet er at her har vi vesentlig færre ligninger enn ukjente. For å finne vinkler trenger man mer informasjon.

**Oppgave 115**

Tre kuler kolliderer i et punkt og blir hengende sammen etter kollisjonen. Ingen ytre krefter virker på kulene. Figuren, Figur 21.115.1, er kun for illustrasjon. Ikke ta hensyn til verken lengde eller vinkel på vektorene som er vist på figuren når du tar stilling til påstandene.



**Figur 21.115.1** Tre kuler som kolliderer

Hvilke påstander er riktige?

1. Kollisjonen er elastisk.
2. I inertialsystemet der kulene ligger i ro etter kollisjonen, er massesenteret i ro også før kollisjonen.
3. I inertialsystemet der kulene ligger i ro etter kollisjonen, må absoluttverdien av bevegelsesmengde til de tre kulene før kollisjonen være lik.
4. Det finnes et inertialsystem der massesenteret har akselerasjon ulik null.

Siden kulene henger sammen etter støtet, er det uelastisk, og påstand 1 er derfor feil. For å finne ut om påstand 3 er gal, er det nok med et eksempel som motbeviser påstanden. Se for deg at to av kulene har like stor absoluttverdi av bevegelsesmengden, og at bevegelsesmengdenes retning står normalt på hverandre. Dersom den tredje kule har en bevegelsesmengde som er motsatt rettet summen av bevegelsesmengden av de to andre kulene, vil kulene være i ro etter støtet. Den tredje kulens absoluttverdi er da  $\sqrt{2}$  større en absoluttverdien av bevegelsesmengden til de to andre kulene. Påstand 3 er altså feil. Da det ikke virker noen ytre krefter på systemet av kuler, vil massesenteret bevege seg med jevn fart eller være i ro, både før og etter støtet. Dermed finnes det ikke noe inertialsystem som kan observere et akselererende massesenter. Påstand 4 er uriktig. Da har vi bare påstand 2 igjen, som må være riktig basert på eliminasjonsmetoden. Det kan selvfølgelig også argumenteres med at siden ingen ytre krefter virker på systemet, så vil massesenterets fart være uberørt av kollisjonen. Er farten til massesenteret null etter kollisjonen, må den også være det før kollisjonen.

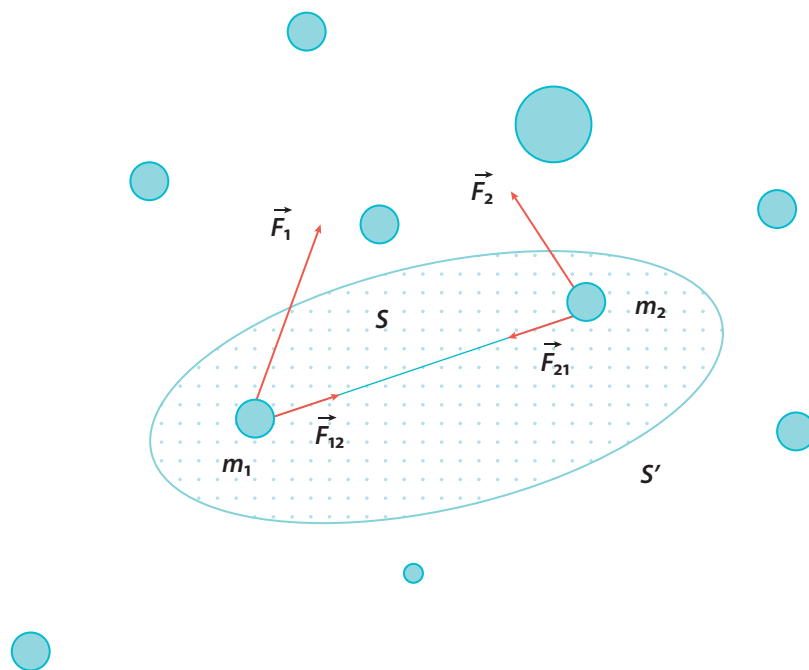
### Oppgave 117

Vi ser på et system bestående av et antall punktmasser,  $m_1, m_2, \dots$ . La  $M = \sum_i m_i$  være summen av alle massene og  $\vec{P}$  være den totale bevegelsesmengden.  $\sum \vec{F}_{int}$  er summen av krefter som virker mellom partikler i systemet, mens  $\sum \vec{F}_{ext}$  er summen av eksterne krefter som virker på partikler i systemet. Ved summering over indre eller eksterne krefter, anta at summen går over alle krefter av den arten. Størrelser merket med CoM gjelder massesenteret.

Hvilke ligninger er riktig?

1.  $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$
2.  $\sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int} = \frac{d\vec{P}}{dt}$
3.  $\sum |\vec{F}_{ext}| = M|\vec{a}_{CoM}|$
4.  $\vec{P} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots$
5.  $\vec{a}_{CoM} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots$

La oss starte med å tegne et enkelt system  $S$  med to massepunkter  $m_1$ ,  $m_2$  og dets omgivelser  $S'$ , Figur 21.117.1.



**Figur 21.117.1** System med omgivelser

Den totale bevegelsesmengden for systemet i et gitt øyeblikk er:

$$\vec{P} = m_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_{12}) + m_2(\vec{v}_2 + \vec{v}_{21}) = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) + (m_1\vec{v}_{12} + m_2\vec{v}_{21})$$

I det siste leddet har vi separert bevegelsesmengden som systemet blir påført utenfra ( $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ )

og bevegelsesmengden internt i systemet ( $m_1\vec{v}_{12} + m_2\vec{v}_{21}$ ). La oss derivere ligningen for bevegelsesmengde:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \left( \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} \right) + \left( \frac{d(m_1\vec{v}_{12})}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_{21})}{dt} \right) \\ \frac{d\vec{P}}{dt} &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) \\ \frac{d\vec{P}}{dt} &= \sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int} \end{aligned}$$

Dermed ser vi at ligning 2 er riktig. Hva med 1? La oss isolere systemet  $S$ . Da virker det ingen ytre krefter, og bevegelsesmengden til det isolerte systemet er konstant:

$$\vec{P} = (m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{21}) = \text{konstant}$$

Det betyr at:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{int} = 0$$

Summen av de indre kreftene i et system vil alltid være null, Newtons tredje lov, og derfor er også ligning 1 riktig:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

For å sjekke ligning 3 må vi bruke definisjonen på hastighet til massesenteret:

$$\vec{v}_{CoM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

Vi henter så frem igjen ligningen for bevegelsesmengde:

$$\vec{P} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) + (m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{21}) = M \vec{v}_{CoM} + (m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{21})$$

Så deriverer vi:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CoM}}{dt} = M \vec{a}_{CoM}$$

Vi har allerede funnet  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  uttrykt ved summen av alle ytre krefter:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Dette gir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CoM}$$

Ønsker vi å se på absoluttverdier, så blir ligningen:

$$|\sum \vec{F}_{ext}| = M |\vec{a}_{CoM}|$$

Dermed ser vi at absoluttverditegnet rundt kreftene er feil, da de er på innsiden av summetegnet, og dermed tas absoluttverdien av den enkelte kraft og ikke summen. Ligning 3 er feil.

Ligning 4 er en underlig påstand:

$$\vec{P} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots$$

Her sammenlignes bevegelsesmoment med akselerasjon direkte. Det er endring i bevegelsesmoment som er relatert til akselerasjon. Ligning 4 er feil.

Det siste vi skal se på er sammenhengen mellom massesenterets akselerasjon og akselerasjonene til de enkelte massepartiklene. Vi kan starte med:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CoM}$$

La oss skrive ut summetegnet:

$$\frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} + \dots = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots = M \vec{a}_{CoM}$$

Vi ser at feilen som er gjort i ligning 5, er at en har glemt å skalere med massene.

### Oppgave 119

Hvilke påstander om potensiell energi er riktig?

1. Så lenge det kun er konservative krefter, er den potensielle energien unikt bestemt av posisjonen til et objekt (eventuelt flere objekter).
2. Potensiell energi er en vektorstørrelse.
3. Hvis kun konservative krefter virker og den potensielle energien er uendret, må akselerasjonen være null.
4. Hvis både konservative og ikke-konservative krefter virker, kan den kinetiske energien endres uten at den potensielle energien endres.

---

La oss bruke eliminasjonsmetoden. Påstand 2 er uriktig da energi ikke er noen vektorstørrelse, men en skalar størrelse. For å sjekke gyldigheten av påstand 3 er det nok med et moteksempel. Et legeme som beveger seg i en sirkelbane rundt et annet på grunn av gravitasjon, en konservativ kraft, vil oppleve at akselerasjonen endrer retning hele tiden og er forskjellig fra null. Påstand 3 er ikke rett. Konservative krefter er definert ved at linjeintegralet av kraften langs en lukket kurve er lik null. Den potensielle energien er kun bestemt av posisjonen til objektet. Påstand 1 er rett. Hva så med Påstand 4? Kan den kinetiske energien endres uten at den potensielle energien endres når en har ikke-konservative krefter? Så absolutt. Det mest nærliggende er å sende kaffekoppen en har ved siden av seg bortover bordet. Friksjonen, som er en ikke-konservativ kraft, får den til å stoppe etter hvert. Den kinetiske energien blir mindre, men den potensielle energien koppen har i tyngdefeltet forblir den samme. Påstand 4 er også rett.

**Oppgave 121**

En kule med masse  $m$  blir skutt ut av en fjær. Kulen blir skutt ut med farten  $v$ . Vi gjør nå samme forsøk igjen med samme fjær, men med en kule som har masse  $2m$ . Hvilken fart får denne kulen?

Begge kulene vil bli skutt ut med den samme kinetiske energi:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (2m) v_{2m}^2$$

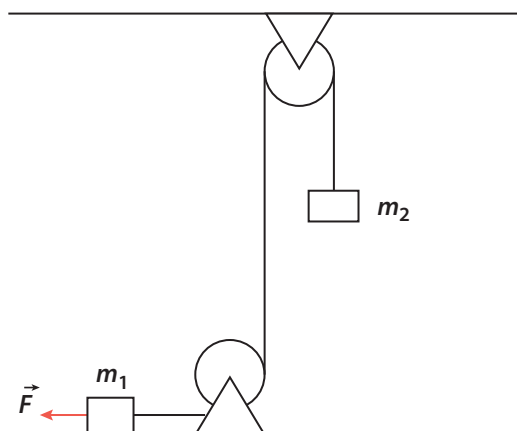
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (2m) v_{2m}^2$$

$$v_{2m} = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Farten til kulen med masse  $2m$  blir  $\frac{v}{\sqrt{2}}$ .

**Oppgave 123**

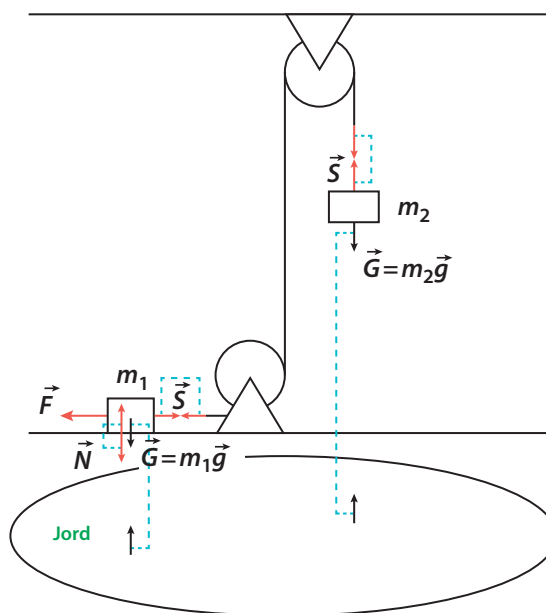
Beregn akselerasjonene for massene  $m_1$  og  $m_2$  og snordraget. Se Figur 21.123.1. Her er snoren og trinsene masseløse, og det er ingen friksjon.



**Figur 21.123.1** Systemet

La oss gå systematisk til verks og starte med å finne alle kreftene som virker i systemet og hvilke av dem som er kraftpar, motsatt rettet og like store, i henhold til Newtons tredje lov. Det er vist i Figur 21.123.2.





**Figur 21.123.2** Systemet med alle kraftpar inntegnet

Som vist av Figur 21.123.2 er det kun den ytre kraften  $\vec{F}$  som ikke er del av et kraftpar.

Det neste vi må gjøre er å se på fri legeme diagrammene for massene  $m_1$  og  $m_2$ , Figur 21.123.3 og anvende Newtons andre lov på disse legemene.



**Figur 21.123.3** Frilegemediagrammer

Vi ser at normalkraften  $\vec{N}$  og tyngden som virker på masse  $m_2$  oppveier hverandre.

Siden massene  $m_1$  og  $m_2$  henger sammen ved hjelp av snoren, vil de få samme akselerasjon:

$$m_2 a = S - m_2 g$$

$$m_1 a = F - S$$

Vi har da to ligninger med to ukjente, henholdsvis  $a$  og  $S$ .

$$m_1 a = F - S = F - m_2 a - m_2 g$$

$$a = \frac{F - m_2 g}{(m_1 + m_2)}$$

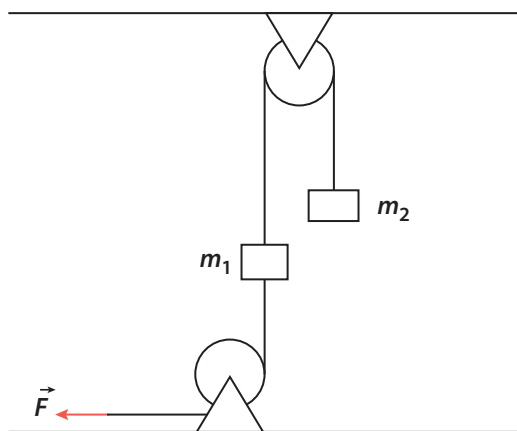
$$m_2 a = S - m_2 g$$

$$S = m_2(a + g) = m_2 \left( \frac{F - m_2 g}{(m_1 + m_2)} + g \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)} \right) = \frac{m_2(F + m_1 g)}{(m_1 + m_2)}$$

Er disse svarene rimelige? Absolutt. Akselerasjonen  $a$  er forskjellen mellom den ytre kraften  $F$  og tyngdekraften som virker på den hengende masse  $m_2$  delt på summen av massene som settes i akselerasjon av kreftene. Basert på om akselerasjonen er større eller mindre enn null, vil snordraget  $S$  være større eller mindre enn det snordraget som trengs for å holde systemet i ro.

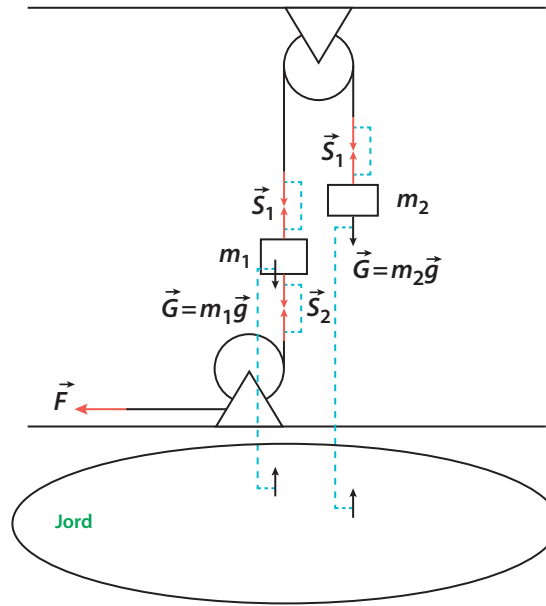
### Oppgave 125

Beregn akselerasjonene for massene  $m_1$  og  $m_2$  og snordraget. Se Figur 21.125.1. Her er snoren og trinsene masseløse, og det er ingen friksjon.



Figur 21.125.1 Systemet

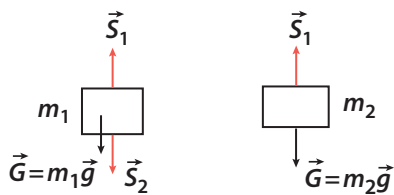
Det kan være formålstjenlig å starte med å finne alle kreftene som virker i systemet, og hvilke av dem som er kraftpar, motsatt rettet og like store, i henhold til Newtons tredje lov. Det er vist i Figur 21.125.2.



**Figur 21.125.2** Systemet med alle kraftpar inntegnet

Som vist av Figur 21.125.2 er det kun den ytre kraften  $\vec{F}$  som ikke er del av et kraftpar.

Det neste vi må gjøre er å se på fri legeme diagrammene for massene  $m_1$  og  $m_2$ , Figur 21.125.3, og anvende Newtons andre lov på disse legemene.



Da snoren er masseløs, vil  $F = S_2$ . Akselerasjonen av massene  $m_1$  og  $m_2$  vil være lik, og vi kan sette opp ligningene for systemet:

$$m_2 a = S_1 - m_2 g$$

$$m_1 a = S_2 + m_2 g - S_1 = F + m_2 g - S_1$$

**Figur 21.125.3** Frilegemediagrammer Da har vi to ligninger med to ukjente  $a$  og  $S_1$ :

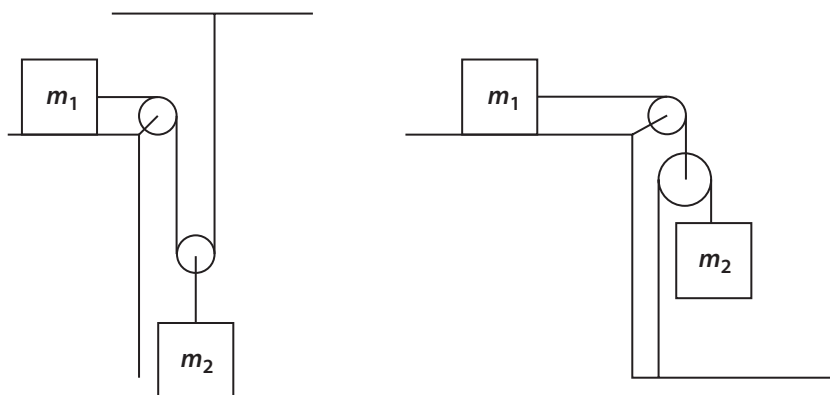
$$m_2 a = -m_1 a + F + m_1 g - m_2 g$$

$$a = \frac{F + g(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$S_1 = m_2(a + g) = m_2 \left( \frac{F + g(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + g \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)} \right) = m_2 \left( \frac{F + 2g m_1}{(m_1 + m_2)} \right)$$

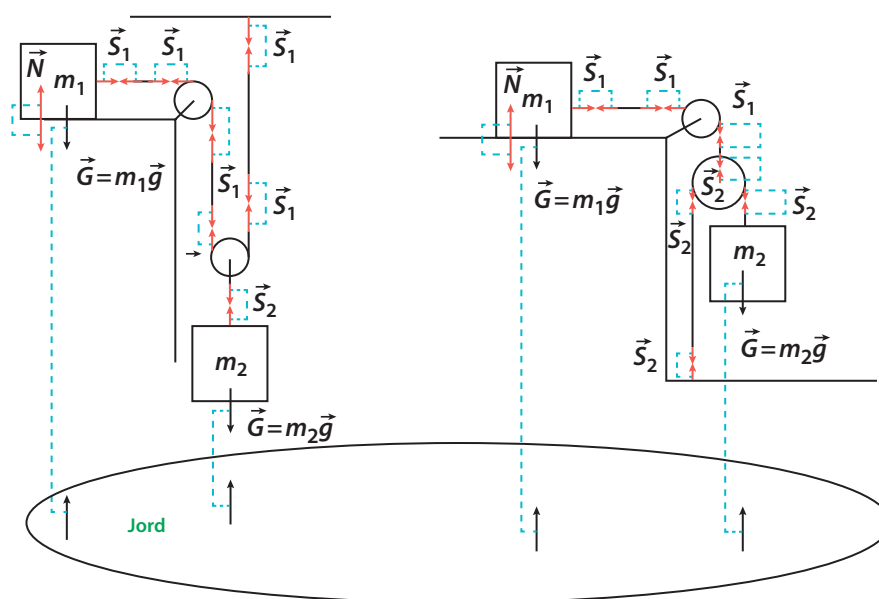
## Oppgave 127

Beregn akselerasjonene til massene  $m_1$  og  $m_2$  og snordragene, Figur 21.127.1. Alle trinser er vektløse og friksjonsløse. Massene sklir uten friksjon. Hvilket av de to systemene kan gi massen  $m_1$  raskere akselerasjon enn fritt fall?

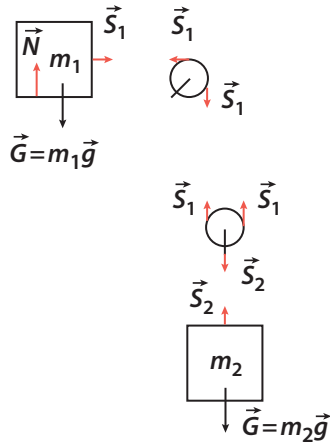


Figur 21.127.1 Systemene

La oss starte med å tegne inn alle kreftene som virker, og bruke Newtons lov til å identifisere kraftpar, Figur 21.127.2.



Figur 21.127.2 Systemene med krefter inntegnet



**Figur 21.127.3** Frilegemediagrammer for systemet til venstre

Videre ser vi på frilegemediagrammene, og starter med systemet til venstre, Figur 21.127.3.

Nå er det bare å ta i bruk Newtons andre lov. Trinsen øverst som kun endrer retning, har det samme snordraget i begge retninger og gir ikke noe bidrag til ligningene. For massen  $m_1$  er normalkraften  $N$  og tyngdekraften like stor og motsatt rettet, og den eneste kraften som sørger for akselerasjon er snordraget  $S_1$ .

$$S_1 = m_1 a_1$$

Trinsen nederst er utsatt for snordragene  $S_1$  og  $S_2$ . Igjen er det bare å finne frem Newtons andre lov:

$$S_2 - 2S_1 = m_{\text{trinse}} a_2$$

Siden massen av trinsen er null:

$$S_2 - 2S_1 = m_{\text{trinse}} a_2 = 0$$

$$S_2 = 2S_1$$

For den fallende massen  $m_2$  får vi:

$$G - S_2 = m_2 a_2$$

Vi har nå tre ligninger, men fire ukjente  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $S_1$  og  $S_2$ . Hvordan skal vi komme videre? Vel, det er en sammenheng mellom hvordan massen  $m_1$  og massen  $m_2$  forflytter seg. Dersom for eksempel  $m_1$  går 10 centimeter mot høyre, vil  $m_2$  falle 5 centimeter. Hastigheten til  $m_1$  vil altså være den dobbelte av hastigheten til  $m_2$  til enhver tid, og hastighetsforandringen, dvs. akselerasjonen, vil også alltid være den dobbelte:

$$a_1 = 2a_2$$

La oss skrive opp de fire ligningene på nytt:

$$m_1 a_1 = S_1$$

$$S_2 = 2S_1$$

$$G - S_2 = m_2 a_2$$

$$a_1 = 2a_2$$

La oss starte med å finne  $a_1$ :

$$m_1 a_1 = S_1 = \frac{1}{2} S_2 = \frac{1}{2} (G - m_2 a_2) = \frac{1}{2} \left( m_2 g - m_2 \frac{a_1}{2} \right)$$

$$m_1 a_1 + \frac{m_2}{4} a_1 = \frac{1}{2} m_2 g$$

$$a_1 = \frac{\frac{1}{2} m_2 g}{m_1 + \frac{m_2}{4}} = \frac{2 m_2 g}{m_2 + 4 m_1}$$

Da finner vi lett de tre andre ukjente:

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{m_2 g}{m_2 + 4 m_1}$$

$$S_1 = m_1 a_1 = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_2 + 4 m_1}$$

$$S_2 = 2 S_1 = \frac{4 m_1 m_2 g}{m_2 + 4 m_1}$$

Kan dette systemet gi massen  $m_1$  raskere akselerasjon enn fritt fall? I så fall må  $a_1$  være:

$$a_1 = \frac{2 m_2 g}{m_2 + 4 m_1} > g$$

Det betyr at:

$$\frac{2 m_2}{m_2 + 4 m_1} > 1$$

Så løser vi det med likhet:

$$\frac{2 m_2}{m_2 + 4 m_1} = 1$$

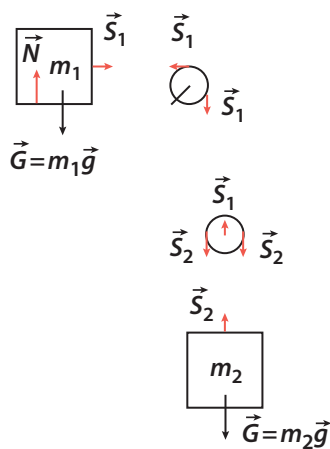
$$2 m_2 = m_2 + 4 m_1$$

$$m_2 = 4 m_1$$

Ja, massen  $m_2$  kan få raskere akselerasjon enn fritt fall, men da må massen  $m_2$  minst være fire ganger så stor som  $m_1$ .

Så var det systemet til høyre. Frilegemediagrammet er gitt i Figur 21.127.4.

**Figur 21.127.4** Frilegemediagrammer for systemet til høyre



Utstyrt med samme logikk som for systemet vi allerede har sett på, kan vi skrive opp følgende ligninger:

$$S_1 = m_1 a_1$$

$$S_1 - 2S_2 = 0$$

$$G - S_2 = m_2 a_2$$

Igjen har vi flere ligninger enn ukjente, men når  $m_1$  beveger seg en viss lengde, så vil  $m_2$  bli den dobbelte. Fart og akselerasjon vil dermed også bli den dobbelte, og vi kan skrive:

$$a_2 = 2a_1$$

Dette er det motsatte av det vi fant for det forrige systemet.

La oss starte med å finne  $a_1$ :

$$m_1 a_1 = S_1 = 2S_2 = 2(G - m_2 a_2) = 2(G - m_2 2a_1) = 2(m_2 g - m_2 2a_1)$$

$$m_1 a_1 + 4m_2 a_1 = 2m_2 g$$

$$a_1 = \frac{m_2 g}{2m_2 + \frac{m_1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 g}{m_2 + \frac{m_1}{4}}$$

Da finner vi ved innsetting de andre ukjente:

$$a_2 = 2a_1 = \frac{m_2 g}{m_2 + \frac{m_1}{4}}$$

$$S_1 = m_1 a_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 g}{m_2 + \frac{m_1}{4}}$$

$$S_2 = \frac{S_1}{2} = \frac{1}{4} \frac{m_1 m_2 g}{m_2 + \frac{m_1}{4}}$$

Kan dette systemet gi massen  $m_1$  raskere akselerasjon enn fritt fall? I så fall må  $a_1$  være:

$$a_1 = \frac{m_2 g}{2m_2 + \frac{m_1}{2}} > g$$

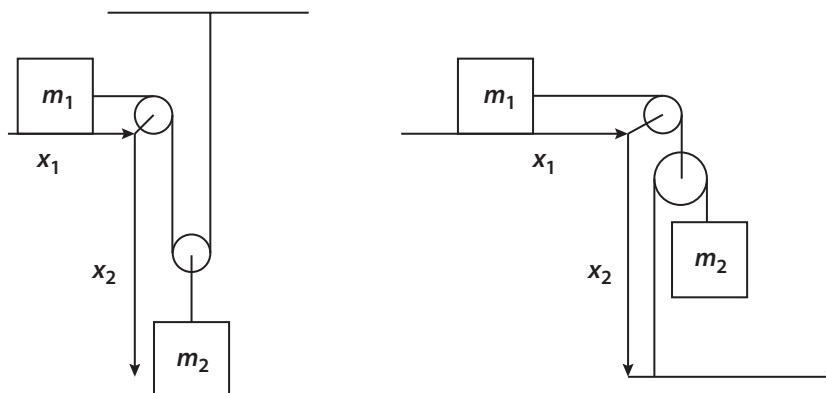
Det betyr at:

$$\frac{m_2}{2m_2 + \frac{m_1}{2}} > 1$$

$$\frac{1}{2 + \frac{m_1}{2m_2}} > 1$$

Da  $\frac{m_1}{2m_2}$  alltid er større enn null, må venstresiden av ulikheten være mindre enn  $\frac{1}{2}$ , og dermed vil aldri  $a_1$  kunne bli større enn  $g$ .

Finnes det andre måter å løse denne oppgaven på? Absolutt. La oss starte med å bruke energibetraktninger. I den forbindelse kan det være hensiktsmessig å innføre to lokale koordinatsystemer  $x_1$  og  $x_2$  som vist i Figur 21.127.5.



Figur 21.127.5 Systemene med lokale koordinatsystemer inntegnet

Som vi har sett, er det en sammenheng mellom hvordan  $m_1$  og  $m_2$  beveger seg, og det er bestemt av snoren. I de lokale koordinatsystemene kan det uttrykkes ved:

$$x_1 = kx_2$$

Her har vi brukt  $k$  som proporsjonalitetskonstant. For systemet til venstre er  $k = 2$ , og for systemet til høyre er  $k = \frac{1}{2}$ .

I de to systemene vil den potensielle energien gå over til kinetisk energi, og en kan skrive:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g \Delta h$$

Ved å derivere sammenhengen mellom de lokale koordinatsystemene for massene  $m_1$  og  $m_2$  finner vi sammenhengen mellom hastighetene:

$$\frac{dx_1}{dt} = k \frac{dx_2}{dt}$$

$$v_1 = kv_2$$

Så setter vi dette inn i energiligningen og løser for farten  $v_2$ :



$$\frac{1}{2}m_1 k^2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g \Delta h$$

$$v_2 = \sqrt{2\left(\frac{m_2 g}{m_1 k^2 + m_2}\right) \Delta h}$$

Dette kjenner vi igjen fra (4.4), og akselerasjonen er:

$$a_2 = \left(\frac{m_2 g}{m_1 k^2 + m_2}\right)$$

For dem av oss som ikke husker denne formelen fra kapittelet «**Historisk sett**», er det en alternativ måte å finne akselerasjonen på. Vi starter med å skrive opp energiligningen på nytt, men nå innfører vi de lokale koordinatene:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g \Delta h$$

$$\frac{1}{2}m_1 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = m_2 g x_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 (m_1 k^2 + m_2) = m_2 g x_2$$

For å finne akselerasjonen til masse  $m_2$  deriverer vi ligningen:

$$\left(\frac{dx_2}{dt}\right)\left(\frac{d^2 x_2}{dt^2}\right)(m_1 k^2 + m_2) = m_2 g \left(\frac{dx_2}{dt}\right)$$

$$a_2 = \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2}\right) = \frac{m_2 g}{(m_1 k^2 + m_2)}$$

Hva blir så  $a_1$ ? Igjen kan vi bruke relasjonen mellom de lokale koordinatsystemene for massene  $m_1$  og  $m_2$  og dobbelderivere for å finne sammenhengen mellom akselerasjonene:

$$x_1 = k x_2$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = k \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$a_1 = k a_2$$

Dermed finner en:

$$a_1 = k a_2 = \frac{k m_2 g}{(m_1 k^2 + m_2)}$$

Med akselerasjonen på plass kan vi bruke Newtons andre lov til å finne snordragene:

$$S_1 = m_1 a_1 = \frac{k m_1 m_2 g}{(m_1 k^2 + m_2)}$$

$$m_2 g - S_2 = m_2 \frac{m_2 g}{(m_1 k^2 + m_2)}$$

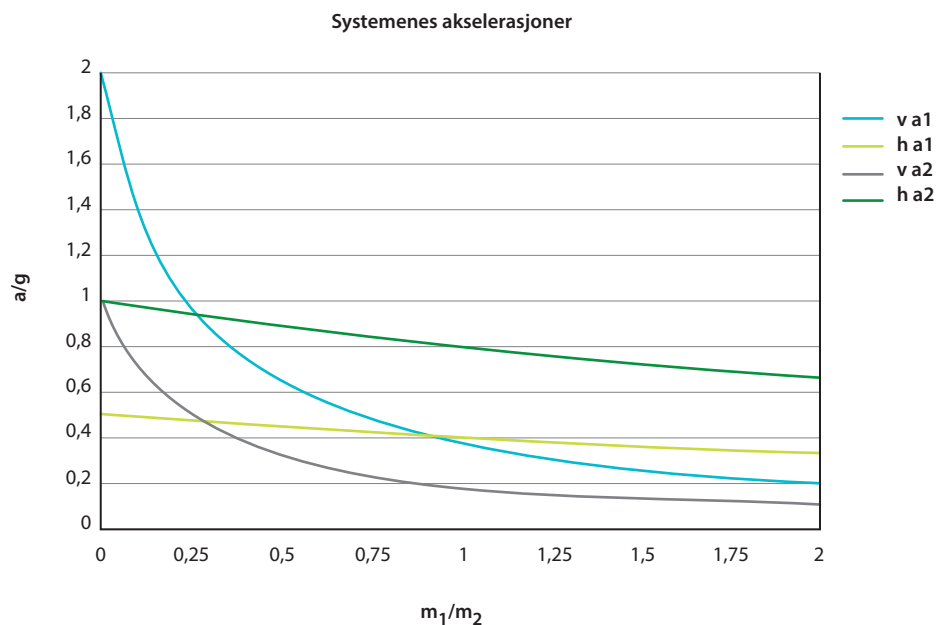
$$S_2 = m_2 g - m_2 \frac{m_2 g}{(m_1 k^2 + m_2)} = \frac{k^2 m_1 m_2 g}{(m_1 k^2 + m_2)}$$

La oss sette det hele inn i en tabell slik at det blir lettere å sammenligne med vår første beregning:

	$a_1$	$a_2$	$S_1$	$S_2$
Venstre system $k = 2$	$\frac{2m_2 g}{(4m_1 + m_2)}$	$\frac{m_2 g}{(4m_1 + m_2)}$	$\frac{2m_1 m_2 g}{(4m_1 + m_2)}$	$\frac{4m_1 m_2 g}{(4m_1 + m_2)}$
Høyre system $k = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}m_2 g}{(\frac{m_1}{4} + m_2)}$	$\frac{m_2 g}{(\frac{m_1}{4} + m_2)}$	$\frac{\frac{1}{2}m_1 m_2 g}{(\frac{m_1}{4} + m_2)}$	$\frac{\frac{1}{4}m_1 m_2 g}{(\frac{m_1}{4} + m_2)}$

Det hele er i sin skjønneste orden og i samsvar med tidligere beregninger.

Helt til slutt kunne det jo være morsomt å tegne grafer for akselerasjonene som vist i Figur 21.127.6.



Figur 21.127.6

Vi ser at for begge systemer så er masse  $m_2$  i fritt fall når  $m_1 = 0$ . Når masse  $m_1$  øker, synker akselerasjonen for masse  $m_2$  for begge systemer og raskest for det venstre systemet. For det venstre systemet er akselerasjonen til masse  $m_1$  større enn tyngdens akselerasjon så lenge  $m_1 < 4m_2$ . For det høyre systemet er akselerasjonen til masse  $m_1$  alltid mindre enn tyngdens akselerasjon. En liten fornøyelighet har vi når  $m_1 = m_2$ . Da er akselerasjonen til  $m_1$  lik for de to systemer.

**Oppgave 129**

Kraftmomentet er unikt definert av angrepspunktet og kraften (vektor).

1. Sant
2. Usant

Kraftmomentet er en krafts evne til å forandre et legemes rotasjon om egen akse og er gitt ved:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

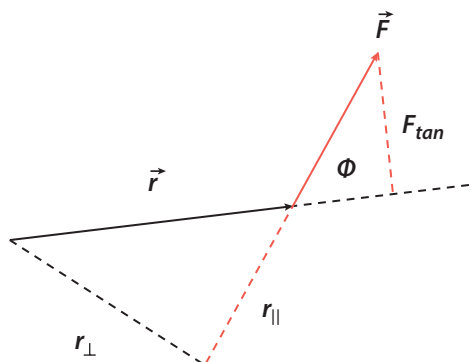
Som vi ser er kraftmomentet definert av kryssproduktet mellom vektor fra akse til angrepspunkt og kraften. Påstanden i oppgaven er derfor usann.

**Oppgave 131**

La kraften  $\vec{F}$  virke i punktet  $\vec{r}$  relativt til et referansepunkt. La  $r_{\parallel}$  og  $r_{\perp}$  være henholdsvis komponenten av  $\vec{r}$  parallelt og perpendikulært på  $\vec{F}$ . Vinkelen mellom  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$  er  $\phi$ , og  $F_{tan}$  er sinus til lengden av  $\vec{F}$ . Hvilke uttrykk for størrelsen på kraftmomentet  $\tau$  er **ikke** riktig?

1.  $\tau = r_{\perp} F_{tan}$
2.  $\tau = rF \sin(\phi)$
3.  $\tau = rF \cos(\phi)$
4.  $\tau = r_{\parallel} F$
5.  $\tau = r_{\perp} F$
6.  $\tau = rF_{tan}$

I Figur 21.131.1 er det gitt en skisse av problemet.



**Figur 21.131.1** Problemet

Her skal vi lures ut på glattisen ved å finne ut hvilke utsagn som **ikke** er riktige. La oss heller finne ut hvilke som er riktige, og da gir de uriktige utsagn seg selv. Påstand 1 er i hvert fall ikke riktig. Påstand 2 er riktig, da den regner ut  $\tau$  basert på lengden av størrelser som står normalt på hverandre. Husk at kraftmomentet er gitt av  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ .  $F \sin(\phi) = F_{\text{tan}}$ , og dermed er også påstand 6 rett. Påstand 3 og Påstand 4 er ikke riktige, mens påstand 5 er det.

For å oppsummere så er påstand 1, påstand 3 og påstand 4 ikke riktige.

### Oppgave 133

Et stivt legeme har vinkelhastighet  $\vec{\omega}(t)$  som hele tiden peker i samme retning. Den eneste akselerasjonen punkter på dette legemet kan ha, er da sentripetalakselerasjon.

1. Sant
2. Usant

---

Her er det bare å svare usant. Dersom vi utsetter legemet for en kraft, og dermed gir det en akselerasjon som får det til å rotere fortere, kan det fremdeles ha en vinkelhastighet som peker i samme retning. Bare at  $\vec{\omega}(t)$  er oppgitt som en funksjon av tiden i oppgaven, indikerer det. Det er helle ikke noe i veien for at legemet kan være utsatt for andre ytre krefter som får det til å akselerere ikke bare rundt sin egen akse og allikevel ha en vinkelhastighet som peker i samme retning. Bare tenk på jorden som går i bane rundt solen. Også akselerasjon parallelt med  $\vec{\omega}(t)$  med angrepspunkt i massesenter er mulig. Påstand 2 er riktig.

### Oppgave 135

Når man regner med vinkelhastighet og vinkelakselerasjon, kan man ikke regne vinkler i grader, men man må bruke radianer.

1. Sant
2. Usant
3. Formlene som vanligvis brukes gjelder for radianer, men de kan enkelt skaleres om til å gjelde for grader.

---

Her er det den siste påstanden som er riktig. Vanligvis bruker en å regne i radianer, men grader kan selvfølgelig brukes. Det må bare en liten omregning til. Det er også viktig å være konsekvent i bruken av vinkelmål.

**Oppgave 137**

Hvis et objekt roterer når det er observert i et inertialsystem, roterer det også observert fra alle andre inertialsystemer.

1. Sant
2. Usant

Inertialsystemer er i jevn rettlinjet i bevegelse i forhold til hverandre. Dersom et objekt er observert roterende i ett inertialsystem, vil det observeres roterende i alle inertialsystemer. Påstand 1 er riktig.

**Oppgave 139**

Et hjul ruller med konstant hastighet på et horisontalt underlag uten å spinne. Det er ingen rullemotstand. Avgjør hvilke påstander som er riktige.

1. Det punktet på hjulet som er i kontakt med bakken, har fart  $v = 0$ .
2. Det punktet på hjulet som er i kontakt med bakken, har akselerasjon  $a = 0$ .
3. Det virker ingen friksjonskraft mellom bakken og hjulet.
4. Det finnes et punkt på hjulet som har akselerasjon  $a = 0$ .

Fra hjulets nav ser en at randen beveger seg med en jevn fart. Da hjulet ikke glipper, vil farten til randen være like stor som navets fart sett fra underlaget. I kontaktpunktet med bakken er farten til randen sett fra en observatør som står på det horisontale underlaget være null. Navets fart og randens fart er motsatt like stor. Påstand 1 er rett. Påstand 2 er ikke riktig, da hele randen er utsatt for sentripetalakselerasjon. Påstand 3 er riktig så lenge hjulet ruller og ikke sklir. Påstand 4 er riktig, da hjulets nav er i jevn,  $v =$  konstant horisontal bevegelse.

**Oppgave 141**

To sylindre ruller ned et skråplan uten rullemotstand. Sylinder 1 har radius  $R$  og masse  $M$  fordelt jevnt over hele sylindere. Sylinder 2 har radius  $R/2$  og masse  $2M$  fordelt som et tynt skall ytterst. Hvilken ruller raskest?

1. Sylinder 1
2. Sylinder 2
3. De ruller like raskt.

Når et objekt ruller ned et skråplan, kreves det energi for å få det til å rotere fortere og fortere. Denne energien «stjeles» av den kinetiske energien for den rettlinjede bevegelsen. Uttrykket for den kinetiske energien til rotasjon er gitt ved:

$$E_{k\text{ rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Trehetsmomentene vi trenger kan hentes fra tabeller eller minnet. For sylinder 1 vil rotasjonsenergien være:

$$E_{k1\text{ rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \omega_{\text{sylinder}}^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega_1^2 = \frac{1}{4} M R^2 \frac{v_1^2}{R^2} = \frac{1}{4} M v_1^2$$

For sylinder 2 finner vi:

$$E_{k2\text{ rot}} = \frac{1}{2} 2M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega_2^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega_2^2 = \frac{1}{4} M R^2 \frac{v_2^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = M v_2^2$$

For samme forbruk av kinetisk energi for de to sylindrene:

$$\frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{4} M v_1^2 = \frac{3}{4} M v_1^2$$

$$\frac{1}{2} 2M v_1^2 + M v_2^2 = 2M v_2^2$$

Så løser  $v_1$  med hensyn på  $v_2$

$$v_1^2 = \frac{8}{3} v_2^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{8}{3}} v_2$$

Sylinder 1 ruller raskest.

### Oppgave 143

Spinn er kun definert for objekter som roterer.

1. Sant
2. Usant

Denne påstanden er usann. Spinnet er gitt ved formelen:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Denne formelen kan også brukes på objekter som har rettlinjete bevegelse. Påstand 2 er riktig.

### Oppgave 145

Hvilke påstander om treghetsmoment er riktig.

1. Et objekt har mer enn ett treghetsmoment.
2. Trehetsmomentet kan også beregnes relativt til punkter utenfor objektet.
3. Kinetisk energi knyttet til rotasjon er proporsjonal med treghetsmomentet.

4. Treghetsmomentet beregnet om massesenteret er mindre enn treghetsmomentet beregnet om enhver annen parallell akse.
5. Treghetsmomentet relativt til massesenteret er unikt bestemt av formen til legemet.

Et objekt har et uendelig antall treghetsmoment. Treghetsmoment for et objekt er definert som summen av alle treghetsmomentene om en gitt akse for alle massepunktene i objektet. Hver gang aksen flyttes, vil en få et nytt treghetsmoment. Påstand 1 er rett. Påstand 2 er også riktig, da aksen kan være utenfor objektet. Kinetisk energi knyttet til rotasjon er gitt ved:

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Her ser vi at kinetisk energi knyttet til rotasjon er proporsjonal med treghetsmomentet. Påstand 3 er rett. Påstand 4 er riktig fordi massesenteret har den korteste avstanden til alle punkter. Treghetsmomentet langs en akse gjennom massesenteret vil være mindre enn for alle andre parallelle akser som ikke går gjennom massesenteret. Påstand 5 er ikke riktig, da treghetsmomentet rundt ulike akser gjennom massesenteret som regel blir forskjellige.

#### Oppgave 147

To kuler har identisk størrelse, men den ene har dobbelt så stor masse som den andre. Begge kulene har konstant massetetthet. La  $I_1$  være treghetsmomentet om massesenteret til den letteste kule. Hva er da treghetsmomentet,  $I_2$ , om massesenteret til den tyngste kule?

1.  $I_2 = I_1$
2.  $I_2 = 2I_1$
3.  $I_2 = 2 \cdot \frac{2}{5} I_1$
4. Ikke nok informasjon til å avgjøre.

Treghetsmomentet til en kule er gitt ved:

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

For de to kulene får en:

$$I_1 = \frac{2}{5} MR^2$$

$$I_2 = \frac{2}{5} 2MR^2 = 2I_1$$

Påstand 2 er riktig.

**Oppgave 149**

To kuler har identisk masse, men den ene har dobbelt så stor radius som den andre. Begge kulene har konstant massetetthet. La  $I_1$  være treghetsmomentet om massesenteret til den minste kule. Hva er da treghetsmomentet,  $I_2$ , om massesenteret til den største kule?

1.  $I_2 = \frac{1}{4}I_1$
2.  $I_2 = \frac{1}{2}I_1$
3.  $I_2 = I_1$
4.  $I_2 = 4I_1$
5. Ikke nok informasjon til å avgjøre.

---

Treghetsmomentet til en kule er gitt ved:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

For de to kulene får en:

$$I_1 = \frac{2}{5}MR^2$$

$$I_2 = \frac{2}{5}M(2R)^2 = 4I_1$$

Påstand 4 er riktig.

**Oppgave 151**

Et stivt legeme roterer med konstant vinkelhastighet  $\vec{\omega}$ . Hvilke påstander er riktig? (Påstander om 'alle punkter' skal tolkes som alle punkter bortsett fra sentrum for rotasjonen).

1.  $\vec{a} = 0$  i alle punkter.
2.  $\vec{a} = 0$
3. Alle punkter har samme sentripetalakselerasjon.
4. Alle punkter har samme vinkelakselerasjon.

---

Alle punkter med unntak av sentrum for rotasjonen har sentripetalakselerasjon, og dermed er påstand 1 gal. Siden vinkelhastigheten  $\vec{\omega}$  er konstant, må vinkelakselerasjonen  $\vec{a}$  være null. Påstand 2 er riktig. Sentripetalakselerasjonen fant vi jo et uttrykk for i kapitlet «**Alt er i endring**» (17.18):

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$



Siden  $\vec{\omega}$  er konstant, avhenger altså akselerasjon av avstanden til sentrum for rotasjonen. Påstand 3 er ikke riktig. Påstand 4 er riktig, da den er en konsekvens av påstand 2.

### Oppgave 153

Det er ved lunsjbordet verdensproblemer løses. Dagens tema er hvor lang tid det ville ta jorden å falle til solen dersom vi plutselig stopper i vår bane rundt den. Noen gjorde overslag, og andre brukte baksiden av servietten. Kan du hjelpe våre venner med å finne løsningen?



Figur 21.153.1 Siste reis

En kan jo begynne med et grovt overslag. Jorden bruker et år rundt solen. Da har den jo gått over fire ganger avstanden mellom jord og sol. Tiden jorden ville bruke ved fall mot solen, må i hvert fall være mindre enn et fjerdedels år, 91,3 dager.

La oss hente frem Keplers tredje lov som gir sammenhengen mellom omløpstid og ellipsebanens storakse. Jorden har tilnærmet sirkelbevegelse, så sett storaksen lik avstanden til solen. Kepler 3:

$$T_{\text{rundt solen}}^2 \propto R^3$$

Det neste vi kan tenke oss, er at jorden foretar en ellipsebane som akkurat når frem til solen. Da blir storaksen for den ellipsen  $\frac{R}{2}$  og omløpstiden:

$$T_{\text{til solen}}^2 \propto \left(\frac{R}{2}\right)^3$$

Setter vi disse to ligningene sammen, finner vi:

$$T_{\text{til solen}} = 2^{-\frac{3}{2}} T_{\text{rundt solen}}$$

Da det å komme frem til solen er gitt av halve omløpstiden, finner vi tiden jorden vil bruke til å falle mot solen:

$$T_{\text{fall}} = \frac{1}{2} T_{\text{til solen}} = 2^{-\frac{5}{2}} T_{\text{rundt solen}} = 2^{-\frac{5}{2}} \cdot 365 \text{ dager} = 64,5 \text{ dager}$$

Er det mulig å regne seg frem til resultatet ved å ta utgangspunkt i Newtons gravitasjonslov? La oss definere et radielt koordinatsystem med origo i solen. Da jordens masse er veldig liten relativ til solen, antar vi at solen blir værende i origo. Siden jorden vil akselerere mot solen, vil den være negativ og gitt ved:

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

Ja vel, men vi er jo på jakt etter et uttrykk som skal gi  $t$  som funksjon av  $r$ . Vi ser at det ligger på lur i  $\frac{d^2 r}{dt^2}$ . Det er bare å «riste» det ut. La oss starte med å innføre farten.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2}$$

Så kan en separere variablene:

$$dv = -\frac{GM}{r^2} dt$$

På høyresiden trenger vi  $dr$ , så det kan være fornuftig å multiplisere ligningen med fart:

$$\begin{aligned} v dv &= -\frac{GM}{r^2} v dt \\ v dv &= -\frac{GM}{r^2} \frac{dr}{dt} dt = -\frac{GM}{r^2} dr \end{aligned}$$

Så er det bare å integrere. Jorden startet fra posisjonen  $R$  med fart null:

$$\begin{aligned} \int_0^v v dv &= \int_R^r -\frac{GM}{r^2} dr \\ \frac{1}{2} v^2 &= \frac{GM}{r} \Big|_R^r = GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = GM \left( \frac{R-r}{rR} \right) \end{aligned}$$

Som en ser har vi nå funnet formelen for den mekaniske energien i et gravitasjonsfelt. Vi må bare uførtroddent fortsette å separere variable og integrere:

$$\begin{aligned} v &= -\sqrt{2GM \left( \frac{R-r}{rR} \right)} \\ \frac{dr}{dt} &= -\sqrt{2GM \left( \frac{R-r}{rR} \right)} \\ \int_R^r \frac{\sqrt{rR} dr}{\sqrt{R-r}} &= -\sqrt{2GM} \int_0^t dt \end{aligned}$$

Her er det fristende å sitere Laplace: «Så ser vi lett at», dvs. funnet på Internett:

$$R^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{\left( \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} \right)} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{2r}{R} - 1 \right) + \frac{\pi}{4} \right) = t \sqrt{2GM}$$

Vel, jeg brukte et regneprogram og altfor mye tid.

Vi ønsker å finne  $r(T_{fall}) = 0$ :

$$R^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = T_{fall} \sqrt{2GM}$$

$$T_{fall} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2GM}} R^{\frac{3}{2}}$$

Ved å sette inn  $R = 1 \text{ AU} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ,  $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  og  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

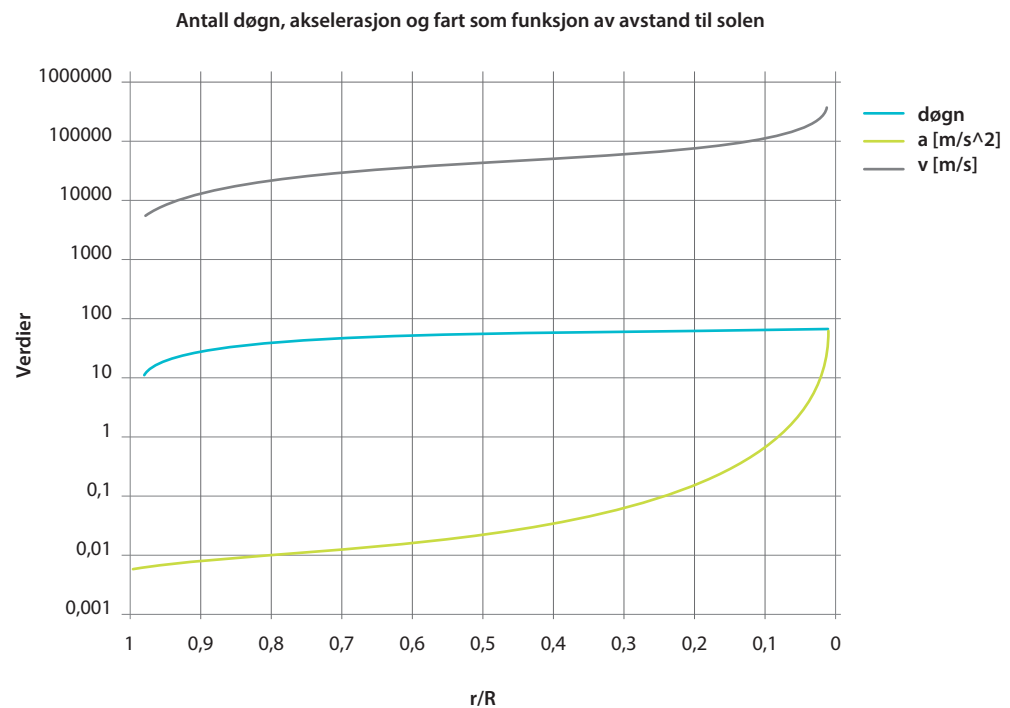
$$T_{fall} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,0 \cdot 10^{30}}} (1,5 \cdot 10^{11})^{\frac{3}{2}} \text{ s} = 64,6 \text{ dager}$$

Dette resultatet var jo fascinerende likt det vi fant da vi brukte Keplers tredje lov. La oss se litt nærmere ved å sette inn konstanten i Keplers tredje lov som vi finner vi kapitlet «Et graverende eksempel» (19.45):

$$T_{fall} = 2^{-\frac{5}{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{5}{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2GM}} R^{\frac{3}{2}}$$

Resultat blir identisk om en regner med Keplers 3. lov eller ser på det rettlinjede fallet. Kanskje ikke så uventet, da Keplers 3. lov gjelder for alle ellipser, også den som er så smal at den blir en strek.

Som en siste liten øvelse kan en jo lage seg grafer, Figur 21.153.2, som viser tilbakelagt tid, akselerasjon og fart for jordens fall som funksjon av avstand til solen.

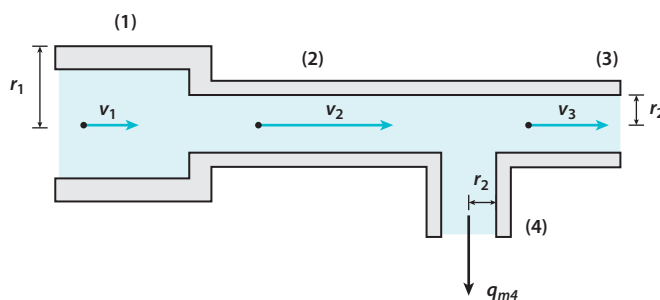


Figur 21.153.2

Denne oppgaven med fallende jord mot solen er et godt eksempel på at noen spørsmål er vesentlig lettere å stille enn å besvare.

### Oppgave 155

Et sirkelrundt rør (1) med radius  $r_1 = 2,0$  cm går over i et tynnere rør (2) som igjen forgreiner seg i to rør (3) og (4). De tynne rørene har radius  $r_2 = 1,0$  cm, se Figur 21.155.1. I rørene strømmer en væske med massetetthet  $\rho = 0,70 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. I rør (1) er farten  $v_1 = 4,0$  cm/s, og massestrømmen i rør (4) er  $q_{m4} = 1,0$  kg/min.



Figur 21.155.1 Rør

1. Hvor stor fart  $v_2$  har væsken i rør (2)?
2. Hvor mange liter strømmer gjennom rør (3) per minutt?

Ved å bruke kontinuitetsligningen kan en svare på spørsmål 1:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = \frac{\pi r_1^2 v_1}{\pi r_2^2} = \frac{r_1^2 v_1}{r_2^2} = 0,16 \text{ m/s} = 16 \text{ cm/s}$$

For å kunne svare på spørsmål 2, må vi se på volumstrømmene i (2), (3) og (4). Fra kontinuitetsligningen har vi:

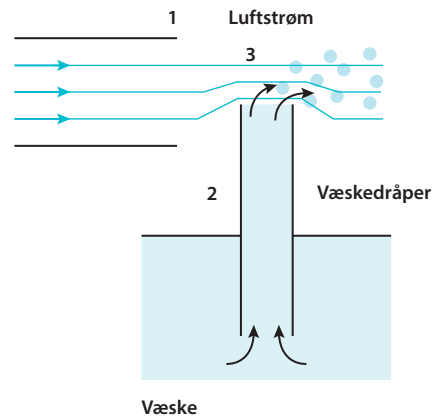
$$q_{v2} = q_{v3} + q_{v4}$$

Det som kommer inn, må komme ut. Volumstrømmen i (3) blir:

$$q_{v3} = q_{v2} - q_{v4} = \pi r_2^2 v_2 - \frac{q_{m4}}{\rho} = 1,6 \text{ l/min}$$

**Oppgave 157**

Ved sprøytelakkering forstøver en luftstrøm lakken, Figur 21.157.1. Forklar hvordan det skjer?



**Figur 21.157.1** Sprøytelakkering

Luftstrømmen fra rør 1 skal passere rør 2. Rør 2 er forbundet med et væskeresservoar. Når luftstrømmen passerer åpningen 3, blir tverrsnittarealet mindre. Dermed øker farten og trykket i luftstrømmen minker, Bernoulli. Det blir derfor undertrykk over røret 2 i forhold til lufttrykket ellers, og luftstrømmen suger opp væske fra reservoaret.

**Oppgave 159**

En delfin har god strømlineform. Den kan svømme med en fart av 8 m/s. Tverrsnittarealet vinkelrett på svømmeretningen for en voksen delfin er om lag  $A = 0,1 \text{ m}^2$  og dragkoeffisienten  $C_D = 0,06$ .

1. Hvor stor er motstanden fra vannet på delfinen når farten er  $v = 8 \text{ m/s}$ ?
2. Hvor stor effekt yter delfinen da?

Vannets massetetthet er  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Motstandskraften fra vannet på delfinen blir:

$$F = \frac{1}{2} A \rho v^2 C_D = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \text{ m}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot (8 \text{ m/s})^2 \cdot 0,06 = 190 \text{ N}$$

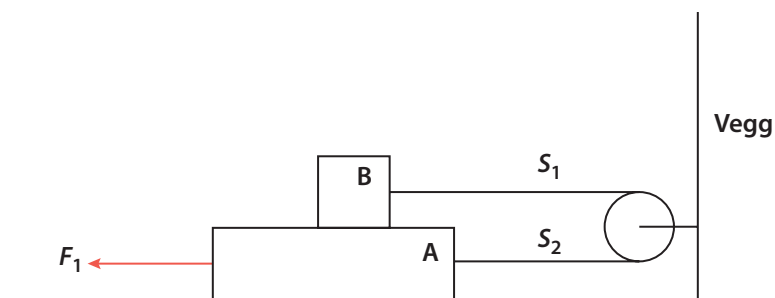
Effekten som trengs for å overvinne motstanden fra vannet:

$$P = \frac{W}{dt} = \frac{F ds}{dt} = Fv = 190 \text{ N} \cdot 8 \text{ m/s} = 1520 \text{ W}$$

**Oppgave 161**

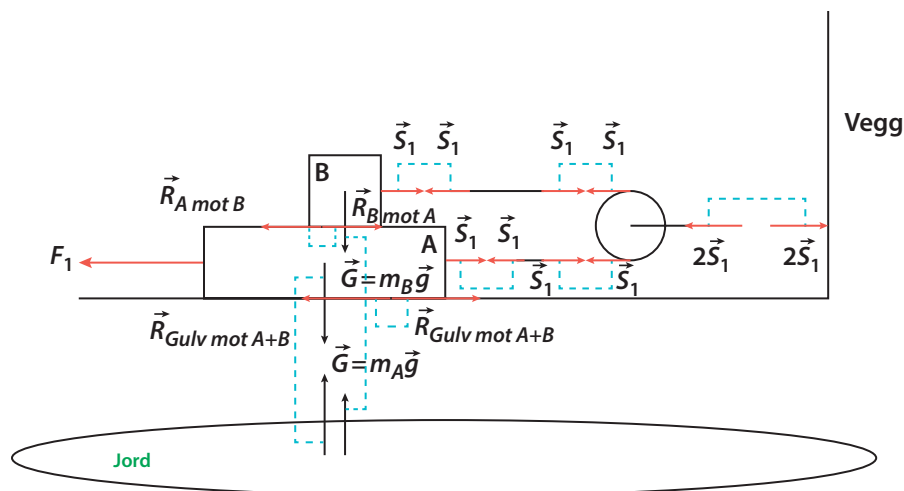
En kloss B med masse 1,0 kg er plassert på toppen av en kloss A med masse 2,0 kg. De to klossene er forbundet med en masseløs snor som løper over en masseløs trinse som vist i Figur 21.161.1. Friksjonskoeffisienten mellom de to klossene og mellom kloss A og gulvet er 0,20. En horisontal kraft  $F_1$  virker på kloss A. Kraften  $F_1$  sin retning er vekk fra vegg.

- a) Tegn separate frilegemediagrammer for de to klossene og trinsen. Hvilken kraft  $F_1$  trengs for å gi kloss A en akselerasjon på  $1,5 \text{ m/s}^2$ ?
- b) Beregn snordragene  $S_1$  og  $S_2$ .



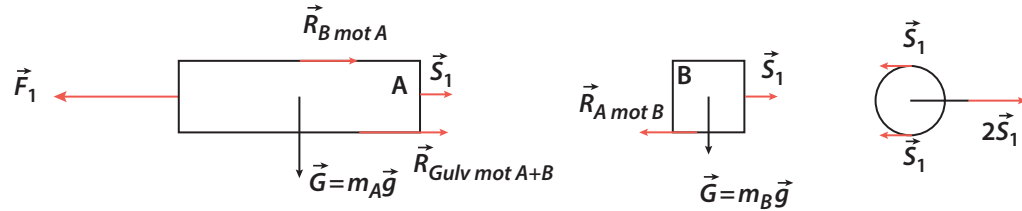
**Figur 21.161.1** Klosser, trinse og krefter

Vi blir ikke bedt om det, men la oss starte med å tegne inn alle kreftene, med sine motkrefter, som virker i Figur 21.161.2 for å få en oversikt over problemet.



**Figur 21.161.2** Krefter inntegnet

a) Så henter vi ut frilegemediagram for klossene og trinsen.



Figur 21.162.3 Frilegemediagrammer

Hvilken kraft trengs for at kloss A skal ha en akselerasjon på  $1,5 \text{ m/s}^2$ ? Siden klossene A og B er forbundet med en snor, må de få samme akselerasjon. Vi kan derfor skrive opp Newtons andre lov for de horisontale kreftene som virker på kloss B:

$$m_B a = S_1 - R_{A \text{ mot } B} = S_1 - \mu m_B g$$

For kloss A gir Newtons andre lov:

$$m_A a = F_1 - S_1 - R_{\text{Gulv mot A+B}} - R_{B \text{ mot } A} = F_1 - (m_B a + \mu m_B g) - \mu(m_A + m_B)g - \mu m_B g$$

$$F_1 = (m_A + m_B)a + \mu(m_A + 3m_B)g$$

$$F_1 = (2,0 \text{ kg} + 1,0 \text{ kg}) \cdot 1,5 \text{ m/s}^2 + 0,2 \cdot (2,0 \text{ kg} + 3 \cdot 1,0 \text{ kg}) \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 14,3 \text{ N}$$

Snordraget  $S_1$  er like stort som  $S_2$  da trinsen er masseløs. Vi bruker formelen vi fant for  $S_1$ :

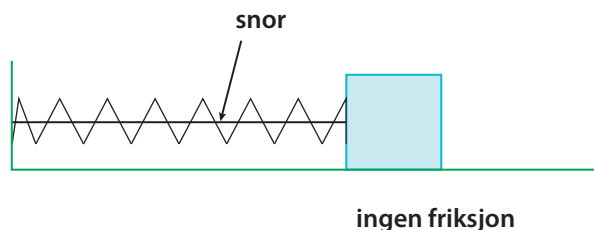
$$m_B a = S_1 - \mu m_B g$$

$$S_1 = m_B a + \mu m_B g$$

$$S_1 = S_2 = 1 \text{ kg} \cdot 1,5 \text{ m/s}^2 + 0,2 \cdot 1,0 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 3,5 \text{ N}$$

**Oppgave 163**

Se Figur 21.163.1. Gulvet er friksjonsløst. En masseløs fjær har en hvilelengde på 0,25 m og en fjærkonstant  $k = 100 \text{ N/m}$ . Fjæren er horisontal med en ende festet til veggen. Fjæren blir komprimert til en lengde på 0,15 m og holdes komprimert av en snor festet til veggen. En liten kloss med masse 0,600 kg ligger på gulvet og berører fjæren.



**Figur 21.163.1** Frilegemediagrammer

- a) Finn kraften som snoren utøver på fjæren. Hvor mye energi er lagret i fjæren?  
 b) Snoren kuttes. Hvor stor er farten til klossen når den mister kontakten med fjæren?

a) Kraften som kreves for å komprimere fjæren:

$$F = kx = 100 \text{ N/m} \cdot (0,25 - 0,15) \text{ m} = 10 \text{ N}$$

Dette er lik kraften som snoren utøver på fjæren.

Energien som er lagret i fjæren er gitt ved det arbeidet som er utført på den:

$$W = E_p = \int F dx = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ N/m} \cdot (0,25 - 0,15)^2 \text{ m}^2 = 0,5 \text{ Nm}$$

- b) Farten på ballen når den sier farvel til fjæren, skyldes at all potensiell energi blir omsatt til kinetisk energi:

$$E_p = \frac{1}{2} m v^2 = 0,5 \text{ Nm}$$

$$\frac{1}{2} m v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5 \text{ Nm}}{0,600 \text{ kg}}} = 1,29 \text{ m/s}$$



# 22

## Kapittel 22

---

# For moro skyld

«If you don't know where you're going,  
any road'll take you there.»

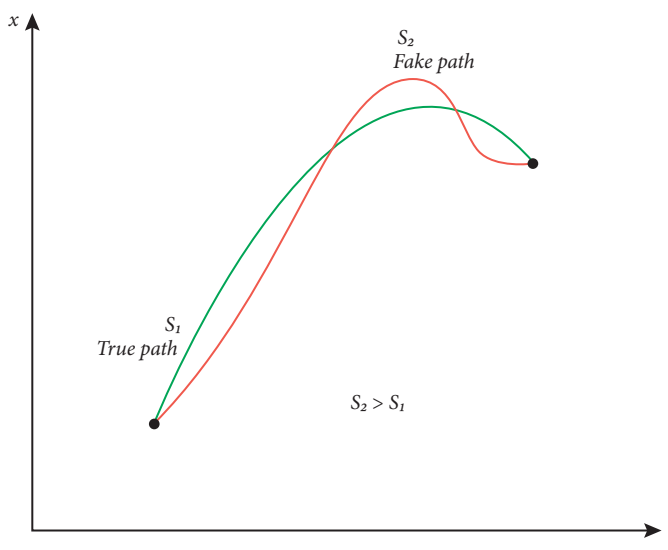
*Any road*, George Harrison (1943–2001)

---

**LÆRINGSUTBYTTE:** Prinsippet om minste virkning, virkning, Lagrange, variasjonsregning, Euler-Lagrange ligningen, gjensyn med Newtons andre lov, innledende øvelse løst med Lagrangeformalisme

---

«Husk at stien alltid er den korteste veien mellom to poster». Ordene til vår instruktør i orienteringsløp, gjaller i hodet. Omgitt av ur, meterhøy brake og åser på alle sider på ukjent sted, innser jeg at løpet er kjørt. I øs pøs regnvær fraktes jeg noen timer senere hjem med assistanse av Røde kors. Dette var den første, men ikke siste gang, jeg opplevde at den optimale veien til målet ikke nødvendigvis er den rette linje.



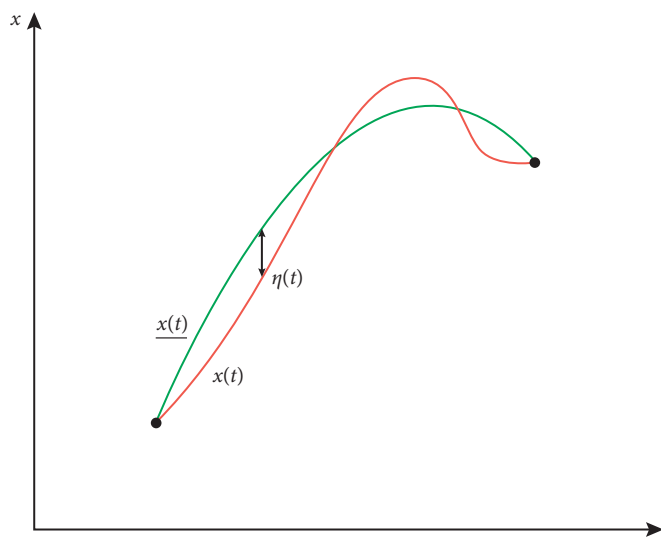
**Figur 22.1** Mulige løsninger på kast i gravitasjonsfelt

Dersom du leter opp «**The Feynman Lectures on Physics**» på nettet, vil du finne mye godt lesestoff til ledige stunder. Jeg er blitt spesielt fascinert av kapittel 19 i Volume II hvor fysikeren Richard Feynman ser på Prinsippet om minste virkning. Ved hjelp av det prinsippet kan en utlede mye fysikk både klassisk og moderne på en elegant måte. Nå kunne du jo bare lest det kapittelet, men jeg skal prøve å lede deg gjennom det og vise deg hvordan prinsippet om minste virkning kan brukes til for eksempel å løse snordragsoppgaven i «**Innledende øvelse**».

I **Figur 22.1** viser Feynman hva som skjer dersom en kaster noe opp i luften. For enkelhets skyld er det bare brukt en dimensjon  $x$  for oppover og tiden  $t$  vises på den horisontale aksene. Det er vist to mulige løsninger (veier) hvor den ene følger de fysiske lover mens den andre kalt «fake path» er mer frihåndstegning. Ved hjelp av det såkalte virkningsintegralet, kan Newtons lover bli presentert ved at den kumulative differansen  $E_k - E_p$  mellom kinetisk og potensiell energi målt tidsintervallet  $t_1$  til  $t_2$  minimeres. gjennomsnittlige kinetiske energi minus den gjennomsnittlige potensielle energi blir så liten som mulig ved å gå fra et punkt til et annet i løpet av tiden  $t_1$  til  $t_2$ .

$$\text{Virkning} = S = \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p) dt \quad (22.1)$$

Dersom vi bruker (22.1) for å regne ut virkningene  $S_1$  og  $S_2$  for henholdsvis «true path» og «fake path», vil vi finne at  $S_1 < S_2$ . Den virkelige veien vil alltid ha den minste virkning  $S$  – det er prinsippet, men hvordan skal vi finne den virkelige veien blant en myriade av andre muligheter? Vi må ty til variasjonsregning. I **Figur 22.2**, ser vi igjen den virkelige veien og en annen mulighet. Avstanden mellom dem ved et gitt tidspunkt er  $\eta(t)$ .



**Figur 22.2** Avstand mellom virkelig og en alternativ vei

Vi kan nå regne ut virkningsintegralet for den virkelige veien gitt ved  $\underline{x(t)}$  fra en alternativ vei  $x(t)$  ved å skrive  $x(t) = \underline{x(t)} + \eta(t)$ .  $\eta(t)$  gir avstanden mellom virkelig vei og alternativ vei. Når den virkelige vei og en alternativ vei er lik til første orden, vet vi at vi har funnet den virkelige veien. Dette minner om å finne ekstremalpunkter for en funksjon, men nå er vi på jakt etter en minimal funksjon. Vi skal drive med variasjonsregning på en funksjon, men før vi begynner så kan vi skrive:

$$L = L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = E_k\left(\frac{dx}{dt}\right) - E_p(x) \quad (22.2)$$

$L$  kalles systemets Lagrange til ære for Joseph Louis Lagrange som introduserte denne måten å tenke fysikk på i sitt hovedverk *Mécanique analytique* (1788). Vi ser at Lagrangefunksjonen er avhengig av både posisjon  $x$  og fart  $v = \frac{dx}{dt}$ . Virkningsintegralet for den nærliggende alternative veien uttrykt med variable fra den virkelige veien blir:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(\underline{x}(t) + \eta(t), \frac{d\underline{x}(t)}{dt} + \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(E_k\left(\frac{d\underline{x}(t)}{dt} + \frac{d\eta(t)}{dt}\right) - E_p(\underline{x}(t) + \eta(t))\right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(E_k\left(\frac{d\underline{x}(t)}{dt}\right) + \frac{d\eta(t)}{dt} \frac{d(E_k(\frac{d\underline{x}(t)}{dt}))}{d(\frac{d\underline{x}}{dt})} + \dots\right) - \left(E_p(\underline{x}(t)) + \eta(t) \frac{d(E_p(\underline{x}(t)))}{dx} + \dots\right) dt \quad (22.3)
\end{aligned}$$

Her har vi brukt Taylorutvikling og sett bort fra ledd av høyere orden enn 1. Vi er på jakt etter variasjonen i virkningen mellom den alternative og virkelige veien:

$$\delta S = S - \underline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d\eta(t)}{dt} \frac{d(E_k(\frac{d\underline{x}(t)}{dt}))}{d(\frac{d\underline{x}}{dt})} - \eta(t) \frac{d(E_p(\underline{x}(t)))}{dx} \right] dt \quad (22.4)$$

Her har vi en liten utfordring med første ledd. Vi skulle gjerne hatt noe som var proporsjonalt med  $\eta(t)$  som er den lille forskjellen mellom de to veiene. Som i all annen variasjonsregning, hjelper delvis integrasjon oss å redde dagen.

$$\delta S = S - \underline{S} = \eta(t) \frac{d(E_k(\frac{d\underline{x}(t)}{dt}))}{d(\frac{d\underline{x}}{dt})} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \eta(t) \left( \frac{d(E_k(\frac{d\underline{x}(t)}{dt}))}{dt} - \frac{d(E_p(\underline{x}(t)))}{dx} \right) \right] dt \quad (22.4)$$

Første leddet blir null siden  $\eta(t)$  er null i endepunktene, og siden  $\eta(t)$  kan være hva som helst så blir variasjonen lik 0 når innholdet multiplisert med  $\eta(t)$  i andre ledd blir null:

$$\frac{d(E_k(\frac{d\underline{x}(t)}{dt}))}{dt} - \frac{d(E_p(\underline{x}(t)))}{dx} = 0 \quad (22.5)$$

Den virkelige veien må altså tilfredsstille ligning (22.5). Vi kan innføre  $L$  igjen og forenkle skrivemåten for derivering med hensyn på fart og vi får da den såkalte Euler-Lagrange ligningen som beskriver den rette vei. Det er godt at George Harrison ikke studerte fysikk og fant den rette vei. Da ville jo vi aldri fått gleden av den fine sangen «Any road».

$$\frac{d(\frac{dL}{dv})}{dt} - \frac{dL}{dx} = 0 \quad (22.6)$$

La oss prøve ligningen på Feynmans eksempel med å kaste noe med masse  $m$  oppover. Lagrangen blir:

$$L(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 - mgx \quad (22.7)$$

Innsatt i Euler-Lagrange ligningen får vi:

$$\frac{d(mv)}{dt} + mg = 0 \quad (22.8)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg = F \quad (22.9)$$

Variasjonen av virkningsintegralet gir oss altså den rette vei som ikke uventet tilfredsstiller Newtons andre lov. NB! Denne variasjonsregningen og Lagrangeformalismen kan kun anvendes på såkalte konservative systemer siden vi bruker potensialer.

Hva med øvelsen i kapitlet «**Den innledende øvelsen**», hvor jeg feilet med bravur i studietiden når jeg skulle bruke Euler-Lagrange ligningen for å finne akselerasjonen? Er det håp nå?

$$L = \frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{1}{2}m_B v^2 - m_B g(-x) \quad (22.10)$$

$$\frac{d(\frac{dL}{dv})}{dt} - \frac{dL}{dx} = 0 \quad (22.11)$$

$$m_A a + m_B a - m_B g = 0 \quad (22.12)$$

$$a = \frac{m_B g}{m_A + m_B} \quad (22.13)$$

Her er det brukt  $-x$  siden en regner det potensielle nullpunktet øverst ved bordkanten. Strålende! Dette gikk jo fort og greit. Hva, var det jeg gjorde feil sist? Litt usikker, men jeg antar at jeg glemte at  $m_A$  også fikk fart.

Du kan jo med all mulig rett mene at Lagrangeformalisme er totalt «overkill» for de problemene vi har syslet med så langt, men det er døråpneren til mer avansert fysikk både klassisk og moderne. Kvantemekanikken er formelig pepret med slik formalisme og fysikere verden over er på jakt etter verdenslagringen som kan beskrive all fysikk i en ligning. Når vi får se den, hersker det stor usikkerhet om.



# Definisjoner m.m.

## Definisjoner

STØRRELSE	DEFINISJON (BASERT PÅ WWW.SNL.NO)
Akselerasjon	Akselerasjon er hastighetsendring per tid. Negativ akselerasjon kalles også <i>retardasjon</i> . $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
Arbeid	Arbeid er en form for energioverføring som skjer ved at en kraft virker på en gjenstand over en viss strekning. $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
Bevegelsesdiagram	Et linjediagram som viser en partikkels bane ved hjelp av punkter med et gitt tidsintervall mellom seg.
Bevegelsesmengde	Bevegelsesmengden til et objekt er produktet av objektets masse og hastighet. $\vec{p} = m\vec{v}$
Corioliskraft	Corioliskraften er en fiktiv kraft som avbøyer bevegelser i et roterende koordinatsystem.
Dempede svingninger	Et system opplever dempede svingninger dersom svingningene i systemet avtar i amplitude og til slutt stopper. Dempning i svingninger finnes i tre hovedformer: overkritisk, kritisk og underkritisk demping.
Dynamikk	Dynamikk beskriver sammenhengen mellom en gjenstand sine bevegelser og de krefter som virker på den.
Effekt	Effekt, eller ytelse, er arbeid utført per tidsenhet. $\vec{P} = \frac{d\vec{W}}{dt}$
Egenfrekvens	Egenfrekvensen er den frekvensen eller de frekvensene som et system svinger med når det har fått en svingebevegelse og så overlates til seg selv.
Ekvivalensprinsippet	Ekvivalensprinsippet slår fast at det er umulig å kunne måle forskjellen på det å være på et sted i et gravitasjonsfelt eller i et system med konstant akselerasjon. Dette kan illustreres med at det er umulig å vite om man er i et romskip som står stille på jordens overflate, der du dyttes nedover, eller i et romskip uten påvirkning av tyngdekraft som akselererer oppover med en konstant akselerasjon på $9.81 \text{ m/s}^2$ .

Elastisk støt	Elastisk støt er et støt mellom to legemer der legemene ikke blir deformert eller endrer indre energi. Den totale kinetiske energien og den totale bevegelsesmengden til legemene er derfor like stor etter støtet som før støtet.
Energi	Energi er evnen til å utføre arbeid.
Eulerkraft	Eulerkraften er en fiktiv kraft som skyldes at rotasjonshastigheten i et roterende system er varierende.
Fart	Fart er størrelsen til hastighet. $v =  \vec{v} $
Fiktive krefter	De fiktive kreftene er et resultat av et legemes treghet. Dersom ingen krefter virker på legemet vil bevegelsen være konstant relativt til et ikke-akselerert referansesystem, men da vil bevegelsen nødvendigvis være ikke-konstant relativt til et akselererende referansesystem. Denne ikke-konstante bevegelsen kan beskrives med Newtons andre lov og en fiktiv kraft.
Fluid	Et fluid er en fase av et stoff der stoffet er enten væske eller gass. Fluidet har mange interessante egenskaper som faste stoffer ikke har.
Frekvens	Frekvensen til et system angir hvor mange ganger et periodisk fenomen gjentar seg per tidsenhet, for eksempel hvor mange ganger en pendel svinger i løpet av et sekund.
Frie svingninger	Et svingedyktig system opplever frie svingninger hvis det bringes ut av sin likevektsstilling og så overlates til seg selv.
Friksjon	Friksjonen er en kraft som virker mellom to legemer, i motsatt retning av bevegelsen, når et av legemene beveger seg relativt til det andre. Kraften skapes av de elektriske ladningene i atomene på overflaten mellom stoffene.
Frilegemediagram	Et diagram hvor ytre krefter som virker på et eller flere legemer er tegnet inn.
Galilei-transformasjon	Galileitransformasjoner er ikke-relativistiske transformasjoner mellom koordinater knyttet til referansesystemer som beveger seg i forhold til hverandre med konstant hastighet langs rette linjer (inertialsystemer). Den siste av transformasjonslikningene sier at tiden er lik i alle inertialsystemer, og er et uttrykk for at tiden er «absolutt» i newtonsk fysikk.
Gravitasjon	Gravitasjon er en tiltrekningskraft som virker mellom alle legemer i universet. Gravitasjonskraften mellom to legemer er proporsjonal med produktet av massene til legemene og invers proporsjonal med kvadratet av avstanden mellom dem. Ved jordoverflaten omtales gjerne gravitasjon som tyngdekraft, og domineres av jordens egen masse.
Harmonisk oscillator	Harmonisk oscillator er en betegnelse på et system som utfører harmoniske svingninger, altså bevegelser som kan beskrives matematisk ved hjelp av en sinus-funksjon. Siden akselerasjonen er den dobbeltderiverte av posisjonen med hensyn på tid betyr dette at en harmonisk oscillator må ha en akselerasjon som er proporsjonal med den relative posisjonen.
Hastighet	Hastighet er definert som posisjonsendring delt på tid. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Hookes lov og fjærer	Hookes lov er en fysisk lov som sier at kraften som skal til for å endre lengden på (derformere) en springfjær er proporsjonal med endringen uansett om man strekker eller trykker sammen fjæren. En konsekvens av denne loven er at en fjær som er deformert vil, i fravær av energitap, svinge med en harmonisk bevegelse hvor amplituden (utslaget) kan beskrives av en perfekt sinuskurve.



Indre friksjon	Indre friksjon, eller skjærkrefter, er de kreftene som oppstår mellom molekylene i et fluid og som hindrer at forskjellige lag i fluidet beveger seg med forskjellig hastighet. De samme kreftene er årsaken til fluidets viskositet.
Inertialsystem	Et inertialsystem, også kalt et treghetssystem, er et koordinatsystem som ikke akselererer. I et inertialsystem gjelder alle Newtons lover, så lenge hastighetene ikke er relativistiske (under en prosent av lyshastigheten).
Kinematikk	Kinematikk er den delen av mekanikken som handler om systemers bevegelse uten å ta hensyn til krefter.
Kinetisk energi	Kinetisk energi, også kalt bevegelsesenergi, er den energien en gjenstand har på grunn av hastigheten sin. Denne energien er lik det arbeidet som må gjøres for å akselerere legemet fra ro til den farten det har. Et legeme i ro har ingen kinetisk energi.
Kompressibel	Sammentrykkbar.
Konservativ kraft	Konservativ kraft er en kraft som er slik at arbeidet kraften gjør når den flytter et legeme fra et punkt A til et punkt B er uavhengig av veien som velges mellom de to punktene. En konsekvens av dette er at hvis legemet vender tilbake til startpunktet er totalt utført arbeid lik 0. Denne egenskapen gjør at vi til en konservativ kraft kan assosiere potensiell energi. Tyngdekraften er et eksempel på en konservativ kraft.
Kraft	En kraft er en påvirkning på en gjenstand som kan endre bevegelsestilstanden til gjenstanden eller deformere gjenstanden ved å for eksempel klemme den flat eller strekke den.
Kraftmoment	Kraftmoment er en krafts evne til å forandre et legemes rotasjon om en akse. Kraftmoment kalles også dreiemoment og er definert som kryssproduktet mellom vektoren fra rotasjonsaksen til kraftens angrepspunkt og kraften. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Kraftpar	Et kraftpar er to like store krefter som virker i motsatt retning av hverandre, men ikke i samme punkt. Et kraftpar som virker på samme legeme, vil søke å rotere legemet, men ikke forskyve det.
Lagranges ligninger (Euler-Lagrange)	Lagranges ligninger, den klassiske mekanikkens bevegelsesligninger slik de ble formulert av J. L. Lagrange. Muliggjør ofte enklere løsning av problemer i mekanikken enn hvis Newtons lover brukes direkte.
Laminær strømning	En strømning av et fluid uten turbulens.
Likevekt	Likevekt er tilstanden til et legeme eller system når det er i ro og det ikke foregår noen endringer innenfor systemet.
Lorentz-transformasjon	Lorentztransformasjoner er ligningene i den spesielle relativitetsteorien som beskriver sammenhengen mellom koordinatene i to inertialsystemer. Lorentztransformasjonene er en generalisering av Galileitransformasjonene for å ta hensyn til at lysets fart i vakuum er uavhengig av referansesystemet det måles i.
Masse	Masse er en egenskap som alt stoff har, og som gjør at stoffet har treghet og tyngde, altså det påvirkes av gravitasjon.
Massesenter	Massesenteret er det punktet vi må plassere et legemes masse i for at dette punktets bevegelse skal være den samme som legemets bevegelse når vi erstatter summen av kreftene som virker på legemets enkeltdeler, med en tilsvarende kraft som virker i punktet.

Mekanisk energi	Summen av et legemes kinetiske og potensielle energi. Et legeme som bare er påvirket av konservative krefter har konstant mekanisk energi.
Oppdriftssenter	Tyngdepunktet til den fortrenge fluidmengden når et fast legeme befinner seg i et fluid.
Periode	En periode i fysikk er tiden det tar for en syklus å gjenta seg. Det kan være for eksempel svingetiden til en pendel eller tiden det tar for månen å rotere rundt jorden en gang.
Posisjon	En partikkels posisjon i forhold til et koordinatsystems origo (sentrum) er angitt med en vektor $\vec{r}$ .
Potensiell energi	Potensiell energi er lagret eller oppspart energi som kan frigjøres.
Q faktor	For en svingekrets er Q definert som $2\pi$ ganger forholdet mellom svingenergi og energitap ved resonansfrekvensen i løpet av en svingning. Dette kan også uttrykkes som forholdet mellom resonansfrekvensen og frekvensforskjellen mellom de to frekvensene som gir halvparten av den maksimale effekten (effekten ved resonansfrekvensen).
Regulator	Regulator er et automatisk virkende apparat som tjener til å utligne ikke-periodiske (tilfeldige, uregelmessige) svingninger i gangen eller tilstanden til en maskin eller et maskinanlegg.
Resonans	I fysikk brukes resonans om det at et system som kan svinge vil oppta energi og komme i sterke svingninger når det blir påvirket av en periodisk kraft med samme frekvens som systemets egenfrekvens.
Rotasjon	Rotasjon, eller dreibevegelse, er betegnelsen på et stivt legemes bevegelse om en akse. Punktene i legemet beveger seg da i sirkler med sentrum i aksen. Punktene har felles vinkelhastighet, men farten er proporsjonal med avstanden fra aksen.
Rotasjonsenergi	Når et legeme roterer med treghetsmoment $I$ og vinkelhastighet $\omega$ , er den kinetiske energien lik rotasjonsenergien, $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ . Dette betyr at jo fortere et legeme roterer, desto større kinetisk energi, i form av rotasjonsenergi, har det.
Sentrifugalkraft	Sentrifugalkraft er en fiktiv kraft som bare opptrer inne i systemer som roterer eller er i bevegelse i krumme baner når koordinatsystemet er festet til det roterende systemet.
Sentripetalakselerasjon	Sentripetalakselerasjon er akselerasjonen et legeme utsettes for når det beveger seg i en krum bane. Akselerasjonen er rettet inn mot banens sentrum.
Skalar	En skalar er en fysisk størrelse som har størrelse, men ingen retning. Tid, temperatur, volum, masse og energi er eksempler på skalarer.
Skalarprodukt	Skalarproduktet av to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med lengde $ \vec{a} $ og $ \vec{b} $ er lengdene multiplisert med cosinus til vinkelen $\alpha$ mellom vektorene: $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \vec{b} \cos(\alpha)$ . Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på hverandre blir skalarproduktet 0.
Snordrag	Kraften et legeme utsettes for når det er festet til en snor som forsøker å akselerere det.
Spinn	Spinn (drivmoment, dreieimpuls, vinkelmoment, rotasjonsmengde eller bevegelsesmengdemoment) er en fysisk størrelse som skildrer rotasjonstilstanden til et system eller et legeme rundt et sentrum. Spinn er definert som kryssproduktet mellom et legemes posisjonsvektor $\vec{r}$ og bevegelsesmengde $\vec{p}$ , $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Det totale spinn i et system er bevart så lenge systemet ikke påvirkes av noe ytre kraftmoment.

Stasjonær strøm	I stasjonære strømmer kan hastigheten variere fra punkt til punkt, men være den samme hele tiden i et hvilket som helst punkt.
Statikk	Statikk er læren om likevekt, den del av mekanikken som behandler betingelsene for at en gjenstand skal være i ro når krefter virker på den.
Stivt legeme	Et legeme som ikke kan deformeres.
Støt	Kollisjon mellom to legemer.
Talje	En talje er en heiseinnretning som gir utveksling på trekraft i tau, vaier eller kjetting, slik at kraften blir større, men hastigheten mindre.
Tregghet	Tregghet er en egenskap et legeme har som gjør at den vil motsette seg å bli satt i bevegelse eller å få hastigheten forandret. Dersom legemet ikke utsettes for krefter vil treggheten sørge for at det fortsetter å bevege seg i samme retning med samme hastighet. Treggheten til et legeme er proporsjonal med legemets masse.
Tregghetsmoment	Tregghetsmomentet er et mål på hvor vanskelig det er å sette et legeme i rotasjon rundt en viss akse. For et massepunkt med masse $m$ er <i>tregghetsmoment</i> om en akse med avstand $r$ til massepunktet $I = mr^2$ . For et utstrakt legeme finner man tregghetsmomentet om aksene ved å summere tregghetsmomentene om aksene for alle de enkelte massepunktene.
Turbulens	Turbulens er uregelmessige og tilsynelatende tilfeldige variasjoner i et fluids bevegelse. Turbulens blir ledsaget av små lokale variasjoner i trykk, temperatur og massetetthet. Fluidpartiklens uordnede bevegelser resulterer i økt friksjon mot en grenseflate og bidrar sterkt til transport av energi, forurensninger m.m. Dette kan f.eks. anskueliggjøres av røyk som velter ut av en skorstein i sterk vind. Den turbulente transporten skyldes væske- og gasspartikler med betydelig størrelse, mens molekylær diffusjon preger turbulensfri laminær strømning.
Tvungne svingninger	Et system kan svinge med en annen frekvens enn sin egenfrekvens, hvis det påvirkes av en regelmessig gjentatt kraft. Da utfører systemet tvungne svingninger.
Tyngde	Tyngde, eller tyngdekraft er kraften et legeme med en viss masse blir utsatt for i et gravitasjonsfelt. Tyngden $G$ til et legeme med masse $m$ i et tyngdefelt med tyngdeakselerasjon $g$ er $G = mg$ .
Uelastisk støt	Et uelastisk støt er et støt mellom to legemer der noe av den kinetiske energien til legemene blir gjort om til andre former gjennom varig deformasjon, lyd og/eller varmeenergi. Hvis legemene etter støtet blir hengende sammen og dermed får samme fart, har de fullført et <i>fullkomment uelastisk støt</i> . Selv om den kinetiske energien er endret er alltid den totale bevegelsesmengden bevart siden summen av kreftene i kollisjonen er lik null.
Vektor	I matematikk og fysikk er en vektor en størrelse som har både størrelse og retning; eksempler er hastighet, akselerasjon og kraft.
Vektorprodukt	Vektorproduktet mellom to vektorer $\vec{A}$ og $\vec{B}$ gir en ny vektor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ som alltid er vinkelrett på både $\vec{A}$ og $\vec{B}$ og har størrelsen $ \vec{C}  =  \vec{A} \times \vec{B}  =  \vec{A}  \vec{B} \sin(\alpha)$ der $\alpha$ er vinkelen mellom $\vec{A}$ og $\vec{B}$ . Hvis $\vec{A}$ og $\vec{B}$ er parallelle blir vektorproduktet 0.

Vinkelakselerasjon	Vinkelakselerasjon er endring i vinkelhastighet per tid. $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Vinkelhastighet	Vinkelhastighet er et mål på <i>rotasjonshastighet</i> og er definert som endring i dreiningsvinkel per tid. $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Viskositet	Viskositet er en egenskap ved et fluid som beskriver hvor mye det motsetter seg at ulike deler av fluidet beveger seg relativt til hverandre. En væske med høy viskositet vil være tyktflytende, mens en væske med lav viskositet vil være tyntflytende.

## Enheter

I denne boken, og mange med den, brukes det såkalte SI-systemet som er en videreutvikling av metersystemet. SI-systemet har syv grunnenheter.

STØRRELSE	ENHET
Lengde	meter (m)
Masse	kilogram (kg)
Tid	sekund (s)
Elektrisk strøm	ampere (A)
Temperatur	kelvin (K)
Stoffmengde	mol
Lysstyrke	candela (cd)

Fra disse grunnene kan en utlede mange avledede enheter. De viktigste i denne sammenheng er:

STØRRELSE	ENHET
Hastighet	meter per sekund ( $\text{m s}^{-1}$ )
Akselerasjon	meter per sekund i annen ( $\text{m s}^{-2}$ )
Bevegelsesmengde	kg meter per sekund ( $\text{kg m s}^{-1}$ )
Vinkelhastighet	radianer per sekund ( $\text{rad s}^{-1}$ )
Vinkelakselerasjon	radianer per sekund i annen ( $\text{rad s}^{-2}$ )
Kraft	newton ( $\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$ )
Energi	joule ( $\text{J} = \text{N m}$ )
Spinn	kg meter i annen ( $\text{kg m}^2$ )
Kraftmoment	newtonmeter ( $\text{N m}$ )
Tregghetsmoment	kg meter i annen per sekund ( $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ )

Effekt	watt ( $W = J s^{-1}$ )
Frekvens	hertz ( $Hz = s^{-1}$ )
Støt	newtonsekund ( $N s$ )
Arbeid	joule ( $J = N m$ )
Tetthet	kg per kubikkmeter ( $kg m^{-3}$ )
Trykk	pascal ( $P = N m^{-2}$ )

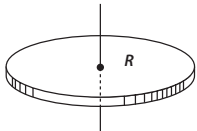
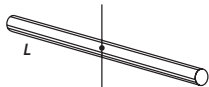
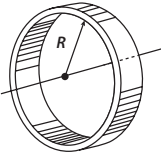
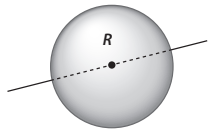
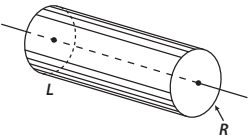
## Konstanter

STØRRELSE	SYMBOL	VERDI
Gravitasjonskonstanten	$G$	$6,67 \times 10^{-11} N m^2 kg^{-2}$
Lyshastigheten	$c$	$3 \times 10^8 m s^{-1}$
Tyngdens akselerasjon	$g$	$9,81 kg m^2 s^{-1}$

## En liten mekanikk formelsamling

NAVN	FORMEL
NEWTONS LOVER	
Første	Når summen av alle krefter, resultantkraften $\vec{F}_{res}$ , som virker på et legeme er lik null, forblir legemet i ro eller i rettlinjet bevegelse med konstant hastighet. $\vec{F}_{res} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$
Andre	Når et legeme blir påvirket av krefter, får legemet en akselerasjon som har samme retning som summen av alle kreftene, resultantkraften, som virker på legemet. Resultantkraften er lik massen multiplisert med akselerasjonen. $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$
Tredje	Newtons tredje lov: Når et legeme A blir påvirket av en kraft $\vec{F}_{B \text{ på } A}$ fra et legeme B, blir B påvirket av en kraft $\vec{F}_{A \text{ på } B}$ . De to kreftene er like store, men motsatt rettet: $\vec{F}_{B \text{ på } A} = -\vec{F}_{A \text{ på } B}$
KINEMATIKK	
Posisjonsvektor	$\vec{r}$
Hastighet	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Akselerasjon	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

RETTLINJET BEVEGELSE MED KONSTANT FART	
Strekning	$s = s_0 + vt$
Fart	$v$
RETTLINJET BEVEGELSE MED KONSTANT AKSELERASJON	
Strekning	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
Fart	$v = v_0 + at$
Akselerasjon	$a$
BEVEGELSE I KONSTANT TYNGDEFELT	
Strekning vertikalt	$s = s_{0 \text{ vertikalt}} + v_{0 \text{ vertikalt}} t - \frac{1}{2} g t^2$
Hastighet vertikalt	$v = v_{0 \text{ vertikalt}} - gt$
Akselerasjon vertikalt	$g$
Strekning horisontalt	$s = s_{0 \text{ horisontal}} + v_{0 \text{ horisontal}} t$
Hastighet horisontalt	$v = v_{0 \text{ horisontal}}$
SIRKELBEVEGELSE MED KONSTANT FART	
Strekning	$s = r\theta$
Fart	$v = \omega r$
Akselerasjon (sentripetal)	$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$
FRIKSJON	
Statisk kan ikke overstige	$R = \mu_s N$
Glidende	$R = \mu_g N$
LIKEVEKTSBETINGELSER	
Første	$\sum \vec{F} = 0$
Andre	$\sum \vec{\tau} = 0$
SPINN OG KRAFTMOMENT	
Spinn	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$
Kraftmoment	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$
Bevaring av spinn	Når summen av kraftmoment som virker på et system er lik null, da er det totale spinn konstant.
Vinkelakselerasjon	$\alpha = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Periferiakselerasjon	$a = R\alpha$

TREGHETSMOMENT	
Skive 	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Tynn stang 	$I = \frac{1}{12}ML^2$
Ring 	$I = MR^2$
Kule 	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Sylinder 	$I = \frac{1}{2}MR^2$
PENDEL	
Akselerasjon	$a = -g\sin\theta$
Hastighet	$v = \sqrt{2gl[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)]} = \sqrt{2g\Delta h}$
Snordrag	$S = mg[3\cos(\theta) - 2\cos(\theta_0)]$
Periode	$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
BEVEGELSESMENGDE	
Bevegelsesmengde	$\vec{p} = m\vec{v}$
Bevaring av bevegelsesmengde	Dersom summen av alle krefter som virker på et system er null er den totale bevegelsesmengden konstant. $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_A + \dots = m\vec{v}_A + m\vec{v}_B + \dots = \text{konstant}$
ARBEID	
Arbeid	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

ENERGI	
Kinetisk energi	$E = \frac{1}{2} m v^2$
Kinetisk rotasjonsenergi	$E_{k\text{ rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Mekanisk energibevaring	$E = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 + m_i g h_i \right) = \text{konstant}$
STØT	
Støt	$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$
Støt mellom to legemer	$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$
Fullstendig elastisk rettlinjett støt	$v_2' = \frac{m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_1 (v_2 - v_1)}{m_2 + m_1}$ $v_1' = \frac{m_2 v_2 + m_1 v_1 + m_2 (v_2 - v_1)}{m_2 + m_1}$
HARMONISK OSCILLATOR	
Posisjon	$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$
Hastighet	$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$
Akselerasjon	$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$
PERIODISK BEVEGELSE	
Periode	$P = \frac{2\pi}{\omega}$
Frekvens	$f = \frac{1}{P}$
Vinkelfrekvens	$\omega = 2\pi f$
TALJER	
Den mekaniske fordel	$\frac{G}{F_A} = \frac{2R}{R-r} = \frac{2}{1-\frac{r}{R}}$
MINSTE VIRKNINGS PRINSIPP	
Virkningsintegralet	$\text{Virkning} = S = \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p) dt$
Lagrange	$L = L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = E_k\left(\frac{dx}{dt}\right) - E_p(x)$
Euler-Lagrange	$\frac{d\left(\frac{dL}{dv}\right)}{dt} - \frac{dL}{dx} = 0$
FLUIDMEKANIKK	
Arkimedes lov	Oppdrift er lik tyngden av den væskemengde som blir fortrengt.
Den ideelle gassloven	$\frac{pV}{T} = \text{konstant}$
Barometerligningen	$p(z) = p_0 e^{-\alpha z}; \alpha = \frac{\rho_0}{p_0} g$
Trykkligning i inkompressibel fluid	$p = p_0 + \rho g z$



Kontinuitetsligningen	$A_1 v_1 = A_2 v_2$
Bernoullis ligning	$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh = \text{konstant}$
Torricellis lov	$v = \sqrt{2gh}$
Skjærspenning	$\tau = \eta \frac{v}{a}$
Poiseuilles lov	$(P_A - P_B) = \left( \frac{8\eta L}{\pi R^4} \right) q_V$
Reynoldstallet	$R = \frac{\text{inertielle krefter}}{\text{viskøse krefter}} = \frac{\rho dv}{\eta}$
Mach-tallet	$M = \frac{v}{c}$ $v$ lydshastighet
VEKTORREGNING	
Vektor med lengde og retning	$\vec{A}$
Vektors lengde	$A =  \vec{A} $
Vektoraddisjon	$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
Vektorsubtraksjon	$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$
Skalarprodukt	$\vec{A} \cdot \vec{B} =  \vec{A}   \vec{B}  \cos(\phi) = AB \cos(\phi)$
Kryssprodukt	$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
Lengde av kryssprodukt	$C = AB \sin(\phi)$
GRAVITASJON	
Gravitasjonskraft	$F = G \frac{mM}{r^2}$
Gravitasjonskonstanten	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$
Gravitasjonspotensial	$E_p = -\frac{GmM}{r}$
Effektivt gravitasjonspotensial	$E_{p,eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$
Tyngdens akselerasjon ved jordoverflaten	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Potensiell energi i konstant tyngdefelt	$E_p = mgh$
Keplers første lov	Planeter beveger seg i ellipser med solen i det ene brennpunktet.
Keplers andre lov	En rett linje fra Solen til planeten sveiper ut like store flater, kalt flatekonstanten, over like lange tidsrom uavhengig av hvor i banen planeten befinner seg.
Keplers tredje lov	Kvadratet av omløpstiden $T$ for en planet er proporsjonal med tredje potens av dens gjennomsnittlige avstand $a$ fra Solen. $T^2 \propto a^3$

TRANSFORMASJONER	
Galileitransformasjon langs x-akse	$x' = x - vt$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = t$
Lorentztransformasjon langs x-akse	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
FIKTIVE KREFTER	
Sentrifugalkraft	$\vec{F}_{\text{sentrifugal}} = m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$
Corioliskraft	$\vec{F}_{\text{coriolis}} = 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$
Eulerkraft	$\vec{F}_{\text{euler}} = m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$

## Det greske alfabet

A α Alfa	N ν Ny
B β Beta	Ξ ξ Ksi
Γ γ Gamma	O o Omikron
Δ δ Delta	Π π Pi
E ε Epsilon	P ρ Rho
Z ζ Zeta	Σ σ ς Sigma
H η Eta	T τ Tau
Θ θ Theta	Υ υ Ypsilon
I ι Iota	Φ φ Phi
K κ Kappa	X χ Khi
Λ λ Lambda	Ψ ψ Psi
M μ My	Ω ω Omega

# Litteraturliste og kilder

---

## Litteraturliste

---

1. Alonso, M. og E.J. Finn (1967, 1968). *Fundamental University Physics*, Volume I. Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Company
2. Hestenes, D., M. Wells, and G. Swackhamer. «Force Concept Inventory». *The Phys. Teach.* 30, 141–158 (1992)
3. Knight R. (2002). *Five Easy Lessons: Strategies for Successful Physics Teaching*. San Fransico: Addison Wesley
4. Lien, J.R. og G. Løvhøiden (2001). *Generell fysikk for universiteter og høyskoler*, Bind1 Mekanikk. Oslo: Universitetsforlaget
5. Sears, F. og M. Zemansky (2011). *University Physics with Modern Physics*, Volume One. San Fransico: Addison Wesley
6. Thorvaldsen, P. (2013). «Verdens største eksperiment». *Naturen* nummer 6 2013 137. årgang s. 234–238
7. Newton, I. (1687). *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. 20. Desember 2018 Internettadresse: <https://archive.org/stream/newtonspmathema00newtrich>
8. Rubinstein, G. (2010). «Newton's Principia Explained» 20. Desember 2018 Internettadresse: <https://www.bing.com/videos/search?q=newtons+principia+explained&&view=detail&mid=FE4DAEB5A2630B23A772FE4DAEB5A2630B23A772&&FORM=VRDGAR>

## Kilder

---

Møtet med *Five Easy Lessons: Strategies for Successful Physics Teaching* av R. Knight [3] var årsaken til at denne boken ble skrevet. Ideer derfra om hvordan fysikk bør undervises, er tatt med i boken. [3] er egentlig ment for fysikklærere, men også elever og studenter kan ha stort utbytte av den boken. I de øvrige kapitler er de generelle fysikkbøkene brukt. Den norske *Generell fysikk for universiteter og høyskoler, Bind 1 Mekanikk* av J.R. Lien og G. Løvhøiden [4] er god, men er kanskje litt krevende med sin matematiske stil. I kapitlet om gravitasjon «**Et graverende eksempel**» er Newtons «**Principia**» og Gary Rubinsteins flotte og forklarende videoer [8] brukt. I kapitlet «**Definisjoner m.m.**» er [www.snl.no](http://www.snl.no) anvendt som hovedkilde til beskrivelse av definisjonene.

# Fasit til Odde oppgaver

---

## Oppgave 1

$$F = \frac{G \sin(\alpha)}{\cos(\theta)} \text{ og } G = \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos(\theta)}$$

## Oppgave 3

$$F_1 = F_3 = 56,6 \text{ N og } F_2 = G = 20 \cdot 9,81 = 196,2 \text{ N}$$

## Oppgave 5

$$\theta = 36,7^\circ \text{ og } S_{AB} = 490,4 \text{ N}$$

## Oppgave 7

$$K = (M + m_1 + m_2) \frac{m_2 g}{m_1}$$

## Oppgave 9

$$a = g \left( \sin(\alpha) - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \cos(\alpha) \right)$$

$$S = \frac{1}{2} m g (\mu_1 - \mu_2) \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \right)$$



**Oppgave 19**

$$a = \frac{\left(m_2 + m_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right)}{m_2 + m_1} g_2$$

$$S = \left(\frac{m_2 m_1 - m_2 m_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)}{m_2 + m_1}\right) g_2$$

**Oppgave 21**

- a)  $a = 3,924 \text{ m/s}^2$
- b) Ja, det er rimelig å ignorere massen til snor og trinse. Feilen blir i størrelse 1,35 % ved overslag og ved finregning:  $1 - \frac{3,876 \text{ m/s}^2}{3,924 \text{ m/s}^2} = 1,22 \%$ . Feilen vår gjør svaret i a) for stort. Det koster krefter å sette trinsen med masse i akselerasjon, og den totale akselerasjon blir derfor mindre.
- c) Vel, en kunne jo tenke seg friksjon mellom trinse og snor som ytterligere ville senket akselerasjonen. Luftmotstand vil i denne situasjonen ansees som neglisjerbar.
- d) Det er antagelsen om masseløs trinse som gir størst bidrag til feil i beregningen.

**Oppgave 23**

Hastigheten til kule A etter støtet:

$$\text{Skalarverdi (fart) er: } |\vec{v}_A| = 4,39 \text{ m/s}$$

$$\text{Retningen er gitt ved: } \theta_2 = 120,1^\circ$$

Hastigheten til kule B etter støtet:

$$\text{Skalarverdi (fart) er: } |\vec{v}_B| = 9,66 \text{ m/s}$$

$$\text{Retningen er gitt ved: } \varphi_2 = 48,8^\circ$$

**Oppgave 25**

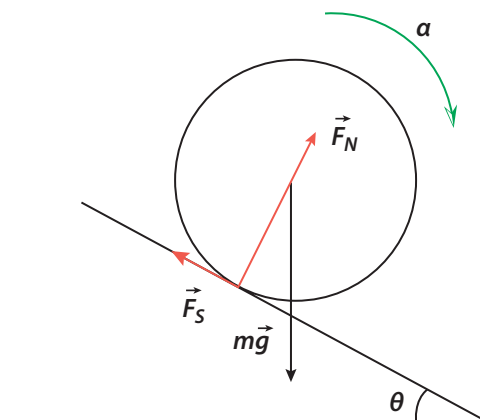
$$\text{Stavens massesenter sin fart: } v_C = 1,71 \text{ m/s}$$

$$\text{Stavens vinkelhastighet: } \omega = 19,2 \text{ rad/s}$$

$$\text{Skivens fart etter støtet: } v_{skive2} = 0,59 \text{ m/s}$$

## Oppgave 27

a)



Frilegemediagram for hjulet.

b)  $I_C = 0,0054 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

c)  $a = 3,27 \text{ m/s}^2$

d)  $\alpha = 54,5 \text{ 1/s}^2$

e)  $\mu_s \geq 0,19$ . Den statiske friksjonen  $\mu_s$  må minst være 0,19 for at hjulet skal rulle.

f)  $L = rp = rmv = 0,06 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ kg} \cdot 2,80 \text{ m/s} = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

## Oppgave 29

B er den riktige bane.

## Oppgave 31

3. Ved passering av bunnpunkt (C).

## Oppgave 33

Påstand 2. Startfarten  $5 \text{ m/s}$  er den eneste riktige.

## Oppgave 35

Alternativ 2 er riktig.

## Oppgave 37

Påstand 1,  $a < 0$  er riktig.



**Oppgave 39**

Alternativ 2,  $v_{gj} = 0$  er det riktige.

**Oppgave 41**

Påstand 2,  $T_1 = (1 + \sqrt{2})T_2$  er riktig.

**Oppgave 43**

Påstand 3. og 5. er riktige.

**Oppgave 45**

Påstand 3 er riktig.

**Oppgave 47**

Påstand 4. er riktig.

**Oppgave 49**

Alternativ 2. er riktig.

**Oppgave 51**

Påstand 4 er riktig.

**Oppgave 53**

$$S_1 = S_2 = 8 N$$

**Oppgave 55**

Påstand 3 er riktig.

**Oppgave 57**

Alternativ 3 er riktig.

**Oppgave 59**

Alternativ 4 er riktig.

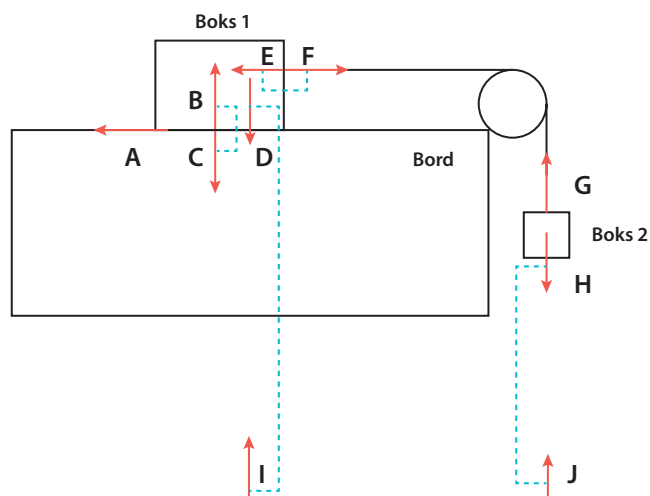
**Oppgave 61**

Påstand 2 er riktig.

**Oppgave 63**

Påstand 2 er riktig.

## Oppgave 65



Systemet hvor kraftpar er identifisert

## Oppgave 67

Påstand 2 er riktig.

## Oppgave 69

Påstand 1 er riktig.

## Oppgave 71

5 m/s

## Oppgave 73

12,5 m/s

## Oppgave 75

Snordraget er 9,3 N.

## Oppgave 77

Effekten som ytes er 18,4 W.

## Oppgave 79

Akselerasjonen er  $5,5 \text{ m/s}^2$ .

## Oppgave 81

Farten etter kollisjonen blir 2 m/s.

**Oppgave 83**

Det tar 1,75 sekunder før ballen når bakken.

**Oppgave 85**

$$W = 0 \text{ J}$$

**Oppgave 87**

$$W = 0 \text{ J}$$

**Oppgave 89**

- a)  $t = 2,8 \text{ s}$
- b)  $v = 9,13 \text{ m/s}$
- c)  $a = 0,093 \text{ m/s}^2$
- d)  $W = 17,9 \text{ J}$

**Oppgave 91**

Massesenteret til prosjektilet vil under alle omstendigheter følge den opprinnelige rettlinjede bevegelsen. Altså mot høyre.

**Oppgave 93**

2. Usant. Bevegelsesmengden er alltid bevart i et støt.

**Oppgave 95**

$$\Delta p = 2,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

**Oppgave 97**

Påstandene 1 og 3 er riktige.

**Oppgave 99**

2. Usant.

**Oppgave 101**

B

**Oppgave 103**

Ikke nok informasjon til å avgjøre.

**Oppgave 105**

Nei.

**Oppgave 107**

Kulene har like stor kinetisk energi.

**Oppgave 109**

$$E_{kf} = 0,2 \text{ J}$$

**Oppgave 111**

$$180^\circ$$

**Oppgave 113**

Ikke nok informasjon til å avgjøre.

**Oppgave 115**

Påstand 1 er riktig.

**Oppgave 117**

Ligningene 1 og 2 er riktige.

**Oppgave 119**

Påstand 1 og 4 er riktige.

**Oppgave 121**

$$\frac{v}{\sqrt{2}}$$

**Oppgave 123**

$$a = \frac{F - m_2 g}{(m_1 + m_2)}$$

$$S = m_2(a + g) = \frac{m_2(F + m_1 g)}{(m_1 + m_2)}$$

**Oppgave 125**

$$a = \frac{F + g(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$S_1 = m_2(a + g) = m_2 \left( \frac{F + 2g m_1}{(m_1 + m_2)} \right)$$

**Oppgave 127**

$$a_1 = \frac{2m_2g}{m_2 + 4m_1}$$

$$a_2 = \frac{m_2g}{m_2 + 4m_1}$$

$$S_1 = \frac{2m_1m_2g}{m_2 + 4m_1}$$

$$S_2 = \frac{4m_1m_2g}{m_2 + 4m_1}$$

Ja, for systemet til venstre kan massen  $m_1$  få en akselerasjon som er større enn fritt fall.

$$a_1 = \frac{m_2g}{2m_2 + \frac{m_1}{2}}$$

$$a_2 = 2a_1 = \frac{m_2g}{m_2 + \frac{m_1}{4}}$$

$$S_1 = m_1a_1 = \frac{m_1m_2g}{m_2 + \frac{m_1}{4}}$$

$$S_2 = \frac{S_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2g}{m_2 + \frac{m_1}{4}}$$

Nei, for systemet til venstre kan ikke massen  $m_1$  få en akselerasjon som er større enn fritt fall.

**Oppgave 129**

2. Usant.

**Oppgave 131**

Påstand 1, påstand 3 og påstand 4 er ikke riktige.

**Oppgave 133**

Påstand 2 er riktig.

**Oppgave 135**

Påstand 3. er riktig.

**Oppgave 137**

Påstand 1 er riktig.

**Oppgave 139**

Påstand 1, påstand 3 og påstand 4 er ikke riktige.

**Oppgave 141**

Påstand 1 er riktig.

**Oppgave 143**

Påstand 2 er riktig.

**Oppgave 145**

Kun påstand 5 er uriktig.

**Oppgave 147**

Påstand 2. er riktig.

**Oppgave 149**

Påstand 4. er riktig.

**Oppgave 151**

Påstand 2 og påstand 4 er riktige.

**Oppgave 153**

64,6 dager.

**Oppgave 155**

1. 16 cm/s
2. 1,6 l/min

**Oppgave 157**

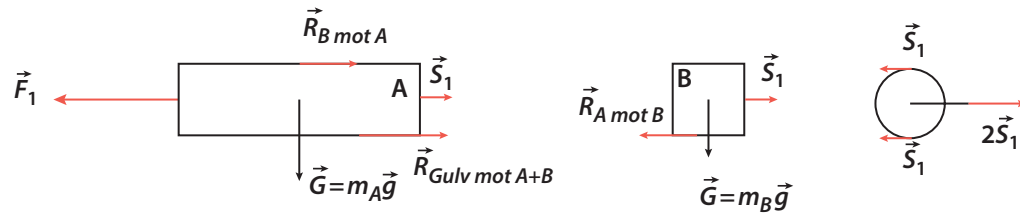
Luftstrømmen fra rør 1 skal passere rør 2. Rør 2 er forbundet med et væskereservoar. Når luftstrømmen passerer åpningen 3, blir tverrsnittarealet mindre. Dermed øker farten og trykket i luftstrømmen minker, Bernoulli. Det blir derfor undertrykk over røret 2 i forhold til lufttrykket ellers, og luftstrømmen suger opp væske fra reservoaret.

**Oppgave 159**

1. 190 N
2. 1520 W

## Oppgave 161

a) Frilegemediagrammer


 Kraften som trengs  $F_1 = 14,3 \text{ N}$ 

 b) Snordraget  $S_1$  er like stort som  $S_2$  da trinsen er masseløs.  $S_1 = S_2 = 3,5 \text{ N}$ 

## Oppgave 163

- Kraften som snoren utøver på fjæren  $F = 10 \text{ N}$ . Energien som er lagret i fjæren er gitt ved det arbeidet som er utført på den  $E_p = 0,5 \text{ Nm}$ .
- Farten på ballen når den sier farvel til fjæren er  $1,29 \text{ m/s}$ .





# Stikkord

---

Sidetall i kursiv viser hvor et emne blir behandlet og den tilhørende definisjon finnes på siden som er uthevet

## A

absolutt tid 247, 248  
akselerasjon 18, 19, 20, 21, 25–27, 33, 34, 38–42, 46–50,  
61–65, 68–70, 73–79, 81, 91–94, 96, 98, 114–123, 126–128,  
131, 133–139, 152, 155, 160, 175, 177–181, 183, 186, 187,  
189–193, 195, 202, 209, 211–214, 216, 217, 219, 223, 226,  
233, 240, 244, 249, 251–253, 260–263, 266–273, 278, 279,  
283–285, 287–290, 294–296, 298, 299, 303, 305, 306, 309,  
325–327, 329, 330, 332, 333, 337, 339, 342, 343, 349, 351,  
352, 354–359, **360**, 361, 367, 370, 373  
akselererte systemer 247, 249  
arbeid 19, 21, 81, 82, 84, 89, 95, 97, 100, 102, 103, 111, 115, 135,  
145, 156, 187, 188, 205, 222–224, 264, 281, 305, 307–309,  
311, 312, 344, **351**, 352, 353, 357, 359, 375  
Arkimedes lov 151, 157, 354  
Atwoods fallmaskin 37, 40, 77, 93

## B

ballistisk pendel 125, 129  
barometerligningen 151, 154, 354  
Bernoullis ligning 151, 160, 161, 162, 163, 165, 170, 171, 361  
bevaring av bevegelsesmengde 18, 20, 77, 79, 359  
bevaring av energi 18, 83, 84, 88, 92, 130, 360  
bevaring av spinn 18, 77, 101, 242  
bevegelsesdiagram 209, 210, 211–214, 216, 217, 229–231, **351**  
bevegelsesmengde 18, 19, 20, 71, 77–79, 81, 84, 88, 100,  
104–106, 129, 130, 188, 189, 223, 225, 248, 249, 276, 277,  
303, 304, 311, 312, 314–318, **351**, 352, 354–356, 359, 371

## C

corioliskraft 254, 255, 256, **351**

## D

definisjoner 19, 345  
dempede svingninger 141, 144, **351**  
det greske alfabet 356  
dimensjonsanalyse 15, 22, 164  
dobbel Atwoods fallmaskin 115  
dynamikk 10, 20, 37, 40, 158, **351**

## E

effekt **345**  
effektivt gravitasjonspotensial 227, 241, 361  
egenfrekvens 142, 146, **351**, 354, 355  
ekvivalensprinsippet 247, 252, **351**  
elastisk støt 77, 87, 129, 130, **346**  
energi 18, 19, 20, 21, 77, 82–85, 88–95, 99, 100, 119, 125, 129,  
130, 135, 138, 139, 160–162, 169, 178, 186–190, 193, 196,  
224–227, 240–245, 276, 277, 281, 303–308, 311–315, 319,  
320, 328, 333–335, 338, 344, 346, 351, **352**, 353–356, 360,  
361, 371, 375  
energibrønn 227, 241  
enheter 22, 239, 356  
enhetsvektorer 199, 202, 206, 207  
eulerkraft 247, **352**, 362  
euler-lagrange ligningen 14, 345, 348, 349, **353**, 360

**F**

fart 19, 22, 38, 39, 42, 45, 67, 69, 70, 84–87, 89–98, 100, 102, 120, 122, 123, 126–130, 137–139, 152, 161, 162, 165, 169, 170, 175, 178–188, 190, 192, 194–196, 209, 210, 213, 218, 222, 232, 240–242, 245–247, 252, 261, 263, 272, 274–278, 280, 282–284, 286, 288–292, 295, 297, 298, 303–307, 309, 311, 312, 314, 316, 320, 327, 328, 333, 338–341, 344, 347–349, 352, 353–355, 358, 367, 368, 370, 374, 375

fiktive krefter 185, 247, 254, 299, 352, 362

fjær 16, 17, 18, 20, 21, 125, 131–139, 143, 145, 186, 190, 196, 22, 303, 320, 344, 352, 375

flatekonstanten 227, 229, 361

fluid 151, 158, 159–162, 167, 168, 352, 353–355, 356, 360

flyging og løft 151, 162

forskyvningsvektor 199, 200

frekvens 146, 148, 351, 352, 354, 355, 357, 360

frie svingninger 141, 143, 352

friksjon 21, 24, 25, 32, 38, 43, 44, 45–50, 52, 59, 63–65, 84, 89, 92, 95–100, 102, 117, 164, 166, 167, 170, 172, 174–176, 182, 190, 191, 196, 245, 255, 258, 260, 264, 273, 280, 281, 292, 311, 313, 319, 320, 322, 324, 344, 352, 353, 355, 358, 367, 368

frilegemediagram 25–29, 33, 34, 35, 40, 45–49, 53, 56, 61, 62, 64, 69, 73, 84, 89, 94, 96, 98, 106, 110, 111, 114, 115, 118, 119, 126–128, 131–133, 195, 196, 260, 262, 265, 266, 268, 270, 271, 278, 306, 321, 323, 325, 326, 342–344, 352, 368, 375

**G**

Galileitransformasjon 247, 248, 249, 289, 352, 353, 362

Galileos skråplan 37, 38

glidende friksjon 43, 44, 45, 65, 175, 261, 358

gravitasjon 10, 19, 25, 42, 83, 160, 224, 226, 227, 228, 230, 232, 238, 239, 240, 244, 319, 338, 346, 351, 352, 353, 355, 357, 361, 364

gravitasjonskonstanten 227, 239, 357, 361

gravitasjonspotensial 227, 240, 361

**H**

harmonisk oscillator 77, 87, 126, 136, 142, 143, 145, 352, 360

hastighet 10, 16, 18, 19, 20, 28, 38, 46, 70, 72, 78, 79, 83–85, 88, 89, 104, 121, 130, 158–160, 163–168, 170–172, 180, 181, 187, 192, 202, 207, 209, 211, 212–219, 224, 230, 231, 233, 241, 245, 248–250, 252–254, 274–276, 281, 284, 285, 288–291, 307, 308, 310, 318, 325, 328, 333, 351, 352, 353–360, 367

Hookes lov 125, 134, 352

hydraulisk jekk 151, 156

høyrehånds koordinatsystem 199, 206

høyrehåndsregel 70, 199, 206

**I**

indre friksjon 151, 166, 167, 170, 353

inertialsystem 188, 189, 192, 247, 248, 249, 255, 311, 312, 316, 333, 352, 353

isolert system 18, 29, 77, 78, 79, 101

**K**

Keplers lover 42, 227, 228, 229

kilder 8, 363, 364

kinematikk 10, 37, 38, 39, 40, 98, 209, 210, 217, 353, 357

kinetisk energi 19, 83, 4, 90, 91, 92, 129, 130, 187, 188, 189, 193, 225, 281, 305, 306, 307, 311, 312, 313, 314, 328, 334, 335, 344, 353, 354, 360, 371

kloss 15–18, 21, 24–28, 31–36, 41, 44–49, 55–57, 60–65, 68, 69, 73, 74, 90–100, 129–135, 137, 157, 175, 177, 182–184, 186, 195, 196, 250, 251, 260–263, 266, 267, 270, 271, 292–297, 306, 342–344

komponentvektorer 199, 204

kompressibel 151, 171, 353

kompressibel gass 151, 171

konserverative krefter 10, 19, 77, 84, 89, 92, 190, 221, 224, 240, 313, 319, 354

konstanter 143, 144, 351

kontinuitetsligningen 151, 154, 161, 165, 340, 361

kraft 16, 18, 19, 21, 25–27, 29, 32, 34, 40, 41, 44, 46, 55–57, 59–61, 63–65, 68, 74–76, 79, 82–85, 87, 92, 96, 101, 111, 112, 114, 117, 131–135, 145, 152, 155, 156, 159, 160, 162–164, 168, 175, 176, 181, 183, 185, 191, 192, 195, 196, 205, 222–224, 226, 230, 231, 233, 238–240, 250, 251, 260, 263, 264, 271, 276, 289, 290, 293, 299, 301, 305, 307, 308, 313, 318, 319, 321–323, 325, 331, 332, 351, 352, 353, 354–357, 375

kraftmoment 18, 52, 55, 56, 57, 67–69, 72, 73, 101, 102, 112, 117, 119, 133, 158, 191, 192, 207, 231, 259, 331, 332, 353, 354, 356, 358

kraftpar 29, 32, 33, 51, 52, 54–56, 60, 132, 265, 302, 320–324, 353, 370

krefter 7, 10, 17–21, 23–29, 32–36, 38, 40, 44, 47, 49, 51–53, 56, 57, 60, 61, 64, 69, 72, 77, 79, 81, 82, 84, 85, 89–93, 103, 105, 106, 117, 126, 128, 131, 132, 155, 160–162, 168, 172, 181, 184, 185, 188–190, 195, 202, 217, 221–225, 228, 240, 247, 250, 251, 254, 256, 258, 261, 262, 264, 273, 281, 283, 289, 293, 297, 299–303, 305, 308, 311–319, 324, 332, 342, 351–355, 357, 359, 362, 367

kryssprodukt 55, 199, 205, 206, 207, 331, 353, 354, 361

**L**

lagrange 14, 345, 347, 353, 360

lagrangeformalisme 14, 24, 345, 349

laminær strøm 151, 167, 170, 353, 355

likevekt 51, 52, 54, 58, 112, 135, 153, 176, 258, 263, 264, 303, 353, 355

linjeintegral 10, 82, 83, 205, 221, 222, 223–225, 308, 319

litteraturliste 363

lodd 15–18, 21, 24–28, 35, 40–42, 46, 47, 49, 55, 58, 68, 69, 73, 74, 90–92, 110, 116, 119, 143, 145, 175, 251, 252, 259

Lorentztransformasjon 247, 249, **353**, 362

## M

Mach-tall 151, 172, 361

masse 16, 18, 19, 20, 21, 24–28, 31, 34, 35, 38, 42, 46–50, 52, 54–57, 62, 67–69, 73–76, 83–85, 87–90, 92, 93, 102, 104, 106, 110, 112, 117–119, 126, 131, 143, 152, 153, 158, 175, 177–179, 182, 186–188, 190, 191, 193, 195, 196, 207, 226, 233, 239–241, 250, 251, 254, 256, 261, 266–274, 276, 278, 280, 291, 292, 295, 303, 305–309, 311, 312, 314, 321, 322, 324–327, 329, 330, 333, 335, 336, 338, 342, 348, 351, 352, **353**, 354–357, 367, 373

masseløse snor 15, 21, 32, 68

massesenter 23, 25, 75, 104, 106, 107, 117, 118, 158, 178, 179, 187, 189, 193, 194, 272, 276, 277–281, 311, 316, 318, 319, 332, 335, 336, **353**, 367, 371

mekanikk formelsamling 357

mekanisk energi 18, 19, 188, 225, 227, 304, 313, **354**, 360

## N

Newtons lover 15, 18, 20, 23, 25, 40, 44, 77, 79, 85, 90, 93, 96, 98, 162, 248, 346, 353, 357

## O

omgivelser 15, 17, 26, 31, 33, 35, 36, 61, 89, 95–97, 100, 104–107, 317

oppdrift 151, 152, 155, 157, 158, 170, 360

oppdriftssenter 151, 158, **354**

## P

pendel 67, 69, 71, 75, 77, 84–90, 101, 102, 125, 129, 147, 179, 183, 184, 254, 256, 282, 283, 295, 296, 298, 352, 354, 359

periode 77, 85, 86, 87, 136, 137, 139, 239, 244, 354, 359, 360

Poiseuilles lov 151, 168, 169, 361

posisjon 10, 38, 39, 83, 84, 98, 103, 104, 121–123, 129, 136, 139, 180, 182, 188, 190, 200, 201, 209, 214–217, 222, 223, 283–286, 288, 290, 310, 313, 319, 338, 347, 352, **354**, 360

posisjonsvektor 54, 71, 80, 207, 217, 229, 231, 233, 238, 252, 354, 357

potensial 225, 240, 241

potensiell energi 19, 77, 83, 84, 90, 91, 94, 135, 160, 161, 188, 190, 225, 240, 281, 305, 312, 313, 319, 344, 346, 353, **354**, 361

Prinsippet om minste virkning 14, 24, 345, 346

## Q

Q faktor 141, 146, **354**

## R

resonans 141, 146, 148, **354**

rettlinjet bevegelse 18, 26, 28, 38, 39, 47, 49, 51, 54, 209, 217, 230, 233, 240, 305, 308, 334, 357, 358

rettlinjet bevegelse med konstant akselerasjon 38, 39, 209, 217, 357, 358

Reynoldstall 151, 171, 361

rotasjon 21, 25, 51, 54, –56, 67, 69, 70, 72, 75, 193, 194, 207, 252, 254, 331, 333–337, 353, **354**, 355

rotasjonsenergi 77, 91, 268, 334, **354**, 360

roterende koordinatsystemer 247, 252

rullemotstand 43, 44, 45, 192, 193, 281, 333

rullende legeme 113, 117

## S

sentrifugalkraft 247, 248, 255, 256, **354**, 362

sentripetalakselerasjon 67, 70, 71, 86, 103, 128, 187, 192, 194, 219, 244, 297–299, 308, 332, 333, 316, 336, **354**

sirkelbevegelse 70, 128, 181, 213, 288, 337, 358

sirkelbevegelse med konstant fart 209, 218, 358

skalar 119, 202, 312, 319, **354**

skalarprodukt 80, 199, 204, 205, **354**, 361

skjærkrefter 151, 166, 167, 170, 171, **347**

skråplan 20, 37, 38, 39, 40, 48–50, 93, 94, 98, 99, 125, 126,

131–135, 174–176, 179, 182, 186, 193, 203, 258, 261–264, 278, 281, 292, 293, 306, 333

skrått kast 209, 212, 219

snor 15–17, 20, 21, 24–28, 31–36, 40, 46, 48, 53, 54, 58, 62, 68, 69, 71, 73–75, 92–94, 102, 111–112, 114, 115, 117–119, 131–136, 175–178, 182, 186, 190, 191, 195, 196, 259–262, 264, 266–273, 282, 292, 293, 303, 305, 320–323, 328, 342–344, 354, 367, 375

snordrag 7, 8, 15, 16, 18, 29, 21, 23–28, 31–36, 40, 41, 45–50, 52, 54–58, 68, 69, 71, 74, 75, 77, 84–86, 90–94, 96, 98, 102, 103, 110, 114, 117, 119, 121, 123, 136, 152, 174, 175, 177, 183, 185, 186, 190, 191, 195, 228, 251, 252, 256, 258–263, 265–269, 271, 282, 293–296, 298, 301, 305, 320, 322, 324, 325, 329, 342, 343, 346, **354**, 359, 370, 375

spinn 18, 19, 20, 67, 71, 100–103, 179, 192, 193, 207, 227, 231, 241–244, 277–281, 333, 334, **354**, 356, 358

stabilitet 151, 158

stasjonær strøm 151, 158, 160, 168, 170, **355**

statikk 51, 52, **355**

statisk friksjon 43, 44

stive legemer 21, 25, 51, 52, 87, 91, 192, 194, 332, 336, **355**

støt 21, 77, 87, 88, 89, 125, 129, 130, 178, 274–277, 304, 311, 312, 314, 316, 352, **355**, 357, 360, 357, 371

system 15–17, 18, 19, 20, 26, 28, 29, 31–36, 46, 52, 53, 55, 58, 61, 64, 73, 77–84, 91, 93–95, 97, 99–102, 104–107, 112, 114, 118, 131–139, 142, 148, 158, 176, 177, 182, 185, 189–191, 223–225, 231, 240, 247, 249–252, 254–256, 260, 264–266, 269,

270, 272, 273, 277, 292, 294, 301–303, 311–318, 320–328, 330, 347, 349, 351–355, 358, 359, 370, 373

## T

talje 109, 110, 111, 112, 156, 176, 263, 264, **355**, 360

tankeeksperiment 15, 16, 17

Torricellis lov 151, 166, 361

total mekanisk energi 118, 227, 240, 313

tregghet 19, 26, 41, 254, 352, 353, **355**

tregghetsmoment 67, 72, 73, 92, 102, 131, 137, 177, 179, 193, 194, 266, 267, 270, 277–279, 334–336, 354, **355**, 356, 359

trinse 15–18, 20, 21, 24–28, 35, 40, 46, 67–69, 72–74, 90–93, 110, 112, 114, 116, 118, 119, 131–137, 175–178, 185, 190, 191, 195, 260, 263, 264, 266, 267, 270, 272, 273, 301, 320, 322, 324, 325, 342, 343, 367, 375

trinse med masse 25, 67, 118, 272, 273

trykk 151, 125, 153–156, 158–162, 165, 172, 341, 355, 357, 374

trykkligning i inkompressibel fluid 156, 360

turbulens 151, 163, 169, 170, 171, 353, 355

tvungne svingninger 141, 145, **355**

tyngde 16, 19, 21, 25, 27, 38, 41, 42, 46, 49, 56, 57, 63, 71, 75, 92–94, 98, 107, 110, 111, 112, 114, 117, 128, 152, 155, 174, 176, 177, 210, 226, 240, 251, 252, 258, 259, 262–264, 267–269, 271, 282, 287, 296–298, 302, 321, 330, 353, **355**, 357, 360, 361

tyngdekraft 21, 25, 26, 35, 54, 55, 84, 85, 127, 128, 185, 186, 210, 222, 281, 290, 293, 296, 297, 299, 301–303, 305, 308, 322, 325, 351–353, **355**

tyngdens akselerasjon 25, 27, 28, 38, 42, 63, 94, 152, 155, 177, 226, 240, 268, 269, 287, 298, 330, 357, 361

## U

uelastisk støt 125, 129, **355**

unnslipningshastighet 227, 245

## V

Variasjonsregning 14, 345, 347, 348, 349

vektor 25, 49, 55, 71, 88, 101, 189, 191, 199–207, 211, 213, 218, 230–232, 315, 353, 354, **355**, 361

vektoraddisjon 199, 201, 361

vektorprodukt 204, **355**

vektorsubtraksjon 199, 201, 202, 361

venturirør 151, 161

vinkelakselerasjon 67, 72, 73, 131, 133, 134, 177, 179, 192, 194, 266, 278, 332, 336, **356**, 356, 358

vinkelhastighet 67, 70, 71, 85, 91, 102, 103, 137, 138, 178, 179, 192, 194, 218, 252, 256, 276–278, 280, 332, 336, 354, 356, 367

Virkning 345, 346, 347, 360

viskositet 151, 166, 169, 171, 353, **356**







